



Lição de Síntese

Aspectos Geométricos do Electromagnetismo

Carlos Manuel dos Reis Paiva

Professor Associado

Departamento de Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Instituto Superior Técnico

Setembro de 2008



Notas Prévias

- Este documento apresenta o sumário pormenorizado da lição a que se refere a alínea *c)* do artigo 5.º do Decreto-Lei n.º 239/2007, de 19 de Junho, referente às provas de agregação tendo em vista a atribuição do título académico de agregado.
- A lição a que se refere este sumário corresponde, no seu essencial, a uma parte da matéria leccionada pelo Autor na disciplina de **Fotónica** do *Mestrado em Engenharia Electrotécnica e de Computadores* do Departamento de Engenharia Electrotécnica e de Computadores (DEEC) do Instituto Superior Técnico (IST). Com efeito, uma parte substancial da presente lição integra-se nos Capítulos 12, 13 e 15 do respectivo programa – tal como se descreve no **Relatório de Fotónica** destas provas.
- Sem prejuízo do que ficou escrito anteriormente, algumas partes desta lição contêm alguns comentários que – dado que pressupõem um nível científico superior ao da disciplina de **Fotónica** – não correspondem, de facto, ao restante nível científico médio em que a lição se insere.
- Além de constituir um sumário pormenorizado, este documento também pode ser considerado como um *texto de apoio* – mas não substitui a lição propriamente dita: dada a sua extensão, nunca seria possível converter este texto numa única Lição com a duração de 1 hora (ponto 4 do artigo 13.º do Decreto-Lei n.º 239/2007 de 19 de Junho).

“Whenever we define something by use of local coordinates, if we wish the definition to have intrinsic significance we must check that it has the same meaning in all coordinate systems.”

Theodore Frankel, *The Geometry of Physics: An Introduction*. Cambridge: Cambridge University Press, 2nd ed., 2004 (p. 24)

ÍNDICE

Prólogo	5
1. Introdução à álgebra geométrica	13
1.1 Produto geométrico ou de Clifford	13
1.2 Álgebra geométrica do espaço	19
1.3 Rotores e contracções	22
2. Álgebra geométrica do espaço: meios anisotrópicos	31
2.1 Equação de Maxwell-Boffi	31
2.2 Definição geométrica de anisotropia	35
2.3 Propagação de ondas electromagnéticas num meio anisotrópico	43
2.4 Álgebra geométrica e álgebra linear	47
3. Álgebra geométrica do espaço-tempo de Minkowski: óptica relativista	55
3.1 Relatividade euclidiana?	55
3.2 Álgebra geométrica do espaço-tempo de Minkowski	60
3.3 As equações de Maxwell no espaço-tempo de Minkowski	77
3.4 Meios em movimento	79
4. Epílogo: Conclusão e notas finais	93
Bibliografia	99
Apêndice A – Invertibilidade do produto geométrico	101
Apêndice B – Os quatérniões de Hamilton	103
Apêndice C – Produto externo de Gibbs	111
Apêndice D – Formas quadráticas	121
Apêndice E – Redução à forma do vácuo	127

*“From the vantage point of the 20th century, when profound advances in mathematical technique have been made (...), Maxwell’s equations seem to have a compelling naturalness and simplicity that almost make us wonder how electric/magnetic fields could ever have been considered to obey any other laws. But such a perspective on things ignores the fact that it was the Maxwell equations themselves that led to a very great many of these mathematical developments. It was the form of these equations that led Lorentz, Poincaré, and Einstein to the spacetime transformations of special relativity which, in turn, led to Minkowski’s conception of **spacetime**.”*

Roger Penrose, ***The Road to Reality: A Complete Guide to the Laws of the Universe***. New York: Alfred A. Knopf, 2005 (p. 441)



Prólogo

Aspectos Geométricos do Electromagnetismo

Sumário

1. **Introdução à álgebra geométrica**
 - 1.1 Produto geométrico ou de Clifford
 - 1.2 Álgebra geométrica do espaço
 - 1.3 Rotores e contracções
2. **Álgebra geométrica do espaço: meios anisotrópicos**
 - 2.1 Equação de Maxwell-Boffi
 - 2.2 Definição geométrica de anisotropia
 - 2.3 Propagação de ondas electromagnéticas num meio anisotrópico
 - 2.4 Álgebra geométrica e álgebra linear
3. **Álgebra geométrica do espaço-tempo de Minkowski: óptica relativista**
 - 3.1 Relatividade euclidiana?
 - 3.2 Álgebra geométrica do espaço-tempo de Minkowski
 - 3.3 As equações de Maxwell no espaço-tempo de Minkowski
 - 3.4 Meios em movimento
4. **Conclusão e notas finais**

Esta lição de síntese intitula-se *Aspectos Geométricos do Electromagnetismo*. Embora corresponda à matéria leccionada pelo Autor na disciplina de *Fotónica*, de que é o professor responsável (ver o **Relatório de Fotónica** destas provas), ela não corresponde a uma aula teórica normal dessa disciplina. Efectivamente, como se trata de uma lição de síntese, tenta-se numa única aula reunir o essencial de vários capítulos de *Fotónica* que são tratados sob um ponto de vista matemático unificador através da utilização da álgebra geométrica (de Clifford).



Os temas abordados agrupam-se, assim, de acordo com duas álgebras geométricas, a saber:

- A álgebra geométrica Cl_3 , radicada no espaço vectorial \mathbb{R}^3 , com a usual métrica euclidiana.
- A álgebra geométrica $Cl_{1,3}$, radicada no espaço vectorial \mathbb{R}^4 , com a métrica de Lorentz $(+---)$ correspondente ao espaço-tempo (plano) da relatividade restrita (i.e., ao espaço-tempo de Minkowski).

Os tópicos tratados são:

- A propagação de ondas electromagnéticas em meios anisotrópicos.
- Os meios em movimento no âmbito da óptica relativista.



Existem duas perspectivas diferentes para se entender o que é um meio do ponto de vista electromagnético.

- Numa primeira perspectiva, um meio não é mais do que uma colecção, mais ou menos complexa, de cargas e de correntes imersas no vácuo. Esta é a filosofia que está na base das chamadas equações de Maxwell-Boffi. Nestas equações, contrariamente às habituais equações de Maxwell, apenas aparecem as intensidades \mathbf{E} (campo eléctrico) e \mathbf{B} (campo magnético); nenhuma referência é feita aos campos auxiliares \mathbf{D} e \mathbf{H} . Trata-se, portanto, de uma perspectiva *fundamental e reducionista* – a da física teórica. Pretende-se explicar o máximo através de um mínimo de princípios organizadores.
- Numa segunda perspectiva, um meio é apenas uma hipótese, i.e., um *modelo simplificado* para a descrição fenomenológica de um dado material. Deste modo define-se, logo à partida, um conjunto de relações ditas *constitutivas* como hipótese de trabalho. São estas relações que estabelecem de que forma as excitações \mathbf{D} (eléctrica) e \mathbf{H} (magnética) são calculadas a partir das intensidades \mathbf{E} e \mathbf{B} . Esta é a perspectiva da física aplicada e da engenharia electrotécnica. Note-se, porém, que esta é também a única perspectiva que permite dar, efectivamente, uma unidade formal ao conjunto complexo de cargas e correntes, imersas no vácuo, a que se dá o nome identificador de meio material.

*“So Maxwell had four field vectors – **E**, **D**, **B**, and **H** – the **D** and **H** were hidden ways of not paying attention to what was going inside the material. You will find the equations written this way in many places.”*

Richard P. Feynman, Robert B. Leighton, and Matthew Sands, *The Feynman Lectures on Physics – Vol. II: Mainly Electromagnetism and Matter*. Reading, MA: Addison-Wesley, 1964 (pp. 32-4 – 32-5)

*“The Boffi equations are mathematically appealing since they now specify both the curl and divergence of the two field quantities **E** and **B**. By the Helmholtz theorem we know that a field vector is uniquely specified when both its curl and divergence are given. But this assumes that the equivalent sources produced by **P** and **M** are true source fields in the same sense as **J**.”*

Edward J. Rothwell and Michael J. Cloud, *Electromagnetics*. Boca Raton, FL: CRC Press, 2001 (p. 46)

Nesta lição adopta-se a segunda perspectiva: numa primeira parte, no âmbito da álgebra geométrica Cl_3 ; numa segunda parte, no âmbito da álgebra geométrica $Cl_{1,3}$.



O estudo dos meios anisotrópicos aparece, deste modo, como uma aplicação da álgebra Cl_3 , enquanto que o estudo dos meios em movimento surge como uma aplicação da álgebra $Cl_{1,3}$. Neste percurso, feito sob a égide unificadora da álgebra geométrica, as equações de Maxwell aparecem sob várias perspectivas: (i) primeiro, na perspectiva (conhecida) do espaço ordinário tridimensional com uma métrica euclidiana; (ii) depois, na perspectiva (menos conhecida) do espaço-tempo de Minkowski. Assim, como resultado colateral, os alunos de Fotónica são, neste processo, expostos à formulação relativista da electrodinâmica clássica. Aqui a qualificação «colateral» poderia significar: um resultado pedagógico positivo mas, no fundo, apenas uma coincidência feliz. Na realidade, não existe aqui qualquer inocência

pedagógica: o Autor reconhece-se «culpado» de ter uma intenção escondida: a de aproveitar esta sequência para, através dela, levar os alunos a adquirir uma visão mais aprofundada da relação íntima entre a teoria da relatividade restrita e a electrodinâmica clássica.



Naturalmente que, atendendo ao facto da álgebra geométrica ser uma linguagem matemática nova, há que começar todo este percurso por algo pouco usual numa disciplina com o nome de *Fotónica*: introduzir alguns aspectos matemáticos considerados básicos de álgebra geométrica, de forma a tornar possível este mesmo percurso. Mas, é claro, dadas as naturais limitações temporais, há que proceder a uma selecção criteriosa dos aspectos matemáticos: não se pretende apresentar uma teoria que, dos pontos de vista axiomático e formal, seja perfeita e fechada; pretende-se, tão somente, insinuar a estrutura matemática, levando os alunos – que não são alunos de matemática – a absorver, paulatinamente mas de forma clara, os fundamentos essenciais que irão permitir entender sem dificuldade este percurso. Também aqui, mais uma vez, não há nem coincidência nem sequer inocência. Com efeito, outro dos objectivos escondidos, mas que é necessário confessar, é o de passar uma outra mensagem: a de que, contrariamente ao que certa popularização científica gosta de transmitir, só se aprende ciência praticando-a e, para a praticar, há que ter os instrumentos próprios. Não é possível passar uma mensagem científica como esta sem dar, simultaneamente, as ferramentas matemáticas indispensáveis. Falar de generalidades, qualitativamente, é (talvez) apropriado para «conversas de café». As aulas, porém, não podem basear-se em receitas ou nebulosas alegóricas: nas aulas o objectivo deve ser a formação numa época inundada de informação.



A interacção entre a matemática, a física e a engenharia é um tema fascinante e, cada vez mais, um tema importante. Dada a natural proliferação das áreas de investigação, que acompanha o progresso técnico-científico, é cada vez mais urgente dar uma preparação matemática unificadora. Seria lamentável que a excessiva e inelutável especialização desse lugar a uma visão empobrecedora e limitada, em que uma visão científica integradora e integrada estivesse, cada vez mais, longe do alcance do especialista. A única forma de ultrapassar a limitação draconiana da regra «o produto do ganho pela largura de banda é constante» é tentar uma via matemática alternativa: em vez de criar, para cada nova área de especialização, uma nova e paralela subespecialidade matemática, talvez seja preferível repensar todo o processo e apontar para uma linguagem matemática que permita, por exemplo, passar do espaço euclidiano tridimensional para o espaço não-euclidiano

quadridimensional sem cortes epistemológicos: porquê passar de uma álgebra vectorial, baseada no produto externo de Gibbs, para uma álgebra tensorial radicalmente diferente? Com a álgebra geométrica tal corte epistemológico é desnecessário e até anti-natural. O produto externo de Gibbs só existe em três dimensões: há que o destronar e substituir pelo produto exterior de Grassmann, que existe em qualquer dimensão, com a vantagem adicional de não depender da métrica adoptada. Além disso, o produto externo de Gibbs pode ficar perfeitamente reduzido ao papel secundário de dual do produto exterior de Grassmann no caso particular da álgebra geométrica \mathcal{Cl}_3 .



A álgebra geométrica é gerada por um novo produto entre vectores – o produto geométrico. Este produto geométrico foi introduzido por William Kingdon Clifford (1845-1879) e, na sua construção, estão simultaneamente presentes o produto interno (ou escalar) e o produto exterior inventado por Hermann Günther Grassmann (1809-1877). Os quaterniões foram inventados por Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) e deram origem ao moderno cálculo vectorial. Josiah Willard Gibbs (1839-1903) amputou os quaterniões e, assim, introduziu o célebre produto externo (trabalhos publicados em 1901 mas desenvolvidos entre 1881 e 1884).

Ainda hoje o electromagnetismo é ensinado através do cálculo vectorial de Gibbs. Talvez essa seja a forma mais indicada para se iniciar o estudo das equações de Maxwell.

“The modern system of vector analysis originated with Josiah Willard Gibbs and Oliver Heaviside. These two great physicists, working independently of each other, constructed their systems (which were essentially identical) during the late 1870’s and early 1880’s. The position of both in relation to previous traditions was identical. It was demonstrated that each began to study the quaternion system under the stimulus supplied by Maxwell’s electromagnetic writings.” (pp. 251-252)

“Heroes the history of science must have, though within the scope of the present study so many scientists have contributed significantly that the discernment of an order of heroic accomplishment is far from easy. Nonetheless, if two of the men discussed are deserving of last mention, they are certainly Grassmann and Hamilton.” (p. 254)

Michael J. Crowe, *A History of Vector Analysis: The Evolution of the Idea of a Vectorial System*. New York: Dover, (1967) 1994

 Harry Moritz Schey, *Div, Grad, Curl and All That: An Informal Text on Vector Calculus*. New York: W. W. Norton & Company, 4th ed., 2005

Não obstante, ao ensinar o electromagnetismo dessa forma, abre-se uma brecha no conhecimento que, mais tarde, é necessário reparar. Com efeito, a indissociável ligação do electromagnetismo à teoria da relatividade passa, deste modo, completamente despercebida. Os tensores não são a única forma de reatar essa ligação: a álgebra geométrica restabelece essa ligação de forma mais natural e sem o corte de paradigma matemático que, na formulação clássica do cálculo tensorial, existe entre vectores e tensores.

“The cross product quickly proved to be invaluable to physicists, dramatically simplifying equations in dynamics and electromagnetism. In the latter part of the nineteenth century many physicists, most notably Gibbs, advocated abandoning quaternions altogether and just working with the individual scalar and cross products. (...) Gibbs was misguided in some of his objections to the quaternion product, but his considerable reputation carried the day and by 1900s quaternions had all but disappeared from mainstream physics.”

Chris Doran and Anthony Lasenby, *Geometric Algebra for Physicists*. Cambridge: Cambridge University Press, 2005 (p. 11)

As álgebras de Clifford constituem, hoje em dia, um instrumento de trabalho essencialmente conhecido por aqueles que, em física, trabalham com (e em) mecânica quântica. Porém, é possível defender uma visão mais abrangente das álgebras de Clifford: elas podem ser entendidas para além de meras álgebras matriciais associativas. Com efeito, deve-se particularmente a David Hestenes essa visão mais abrangente da estrutura das álgebras de Clifford como uma álgebra geométrica enquanto linguagem universal. No entanto, é discutível que seja conveniente abdicar completamente de outros instrumentos matemáticos como as formas diferenciais por uma razão importante: ao contrário da álgebra geométrica que transporta uma métrica dentro da sua estrutura, as formas diferenciais não dependem de qualquer métrica.

“Hamilton’s choice of the name quaternion is unfortunate, for the name merely refers to the comparatively insignificant fact that the quaternions compose a linear space of four dimensions. The name quaternion diverts attention from the key fact that Hamilton had invented a geometric algebra. (...) Quaternions today reside in a kind of mathematical limbo, because their place in a more general geometric algebra is not recognized. The prevailing attitude toward quaternions is exhibited in a biographical sketch of Hamilton by the late mathematician E. T. Bell. The sketch is titled “An Irish Tragedy”, because for the last twenty years of his life, Hamilton concentrated all his enormous mathematical powers on the study of quaternions in, as Bell would have it, the quixotic belief that quaternions would play a central role in the mathematics of the future. Hamilton’s judgement was based on a new and profound insight into the relation between algebra and geometry. Bell’s evaluation was made by surveying the mathematical literature nearly a century later. But union with Grassmann’s algebra puts quaternions in a different perspective. It may yet prove true that Hamilton looking ahead saw further than Bell looking back. (...) By the end of the 19th century a lively controversy had developed as to which system was more suitable for the work of theoretical physics, the quaternions or vector algebra. A glance at modern textbooks shows that the votaries of vectors were victorious. However, quaternions have reappeared disguised as matrices and proved to be essential in modern quantum mechanics. The ironic thing about the vector-quaternion controversy is that there was nothing substantial to dispute. (...) The whole controversy was founded on the failure of everyone involved to appreciate the distinction between vectors and bivectors. Indeed, the word “vector” was originally coined by Hamilton for what we now call a bivector. Gibbs changed the meaning of the word to its present sense, but no one at the time understood the real significance of the change he had made.

David Hestenes, *New Foundations for Classical Mechanics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2nd ed., 1999 (pp. 59-61)

“The emphasis on the structures themselves rather than on their representations leads us naturally to use the coordinate-free language of modern mathematics.”

William L. Burke, *Applied Differential Geometry*. Cambridge: Cambridge University Press, 1985 (p. xii)



1. Introdução à Álgebra Geométrica

A lição começa com uma introdução à álgebra geométrica. Não se pretende fazer uma formalização axiomática da álgebra. O objectivo é o de apenas introduzir alguns conceitos básicos que permitirão, ao longo da lição, dar uma unidade formal a alguns aspectos da teoria electromagnética em meios materiais. A álgebra geométrica do espaço é aqui introduzida de forma sucinta. Ao contrário da álgebra vectorial ordinária (i.e., a álgebra tridimensional euclidiana baseada no produto externo de Gibbs), trata-se – para os alunos de Fotónica – de uma álgebra desconhecida.

1.1 Produto geométrico ou de Clifford

A linguagem matemática desta lição é baseada na álgebra geométrica de Clifford. Nesta álgebra admite-se que existe um espaço linear (ou vectorial) \mathbb{R}^n definido sobre o corpo \mathbb{R} dos números reais.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{álgebras geométricas} \\ \text{euclidianas} \end{array}} \rightarrow \boxed{\begin{array}{l} n=2 \quad Cl_2 \quad \text{álgebra geométrica do plano} \\ n=3 \quad Cl_3 \quad \text{álgebra geométrica do espaço} \end{array}}$$

A álgebra geométrica permite, também, estudar outras dimensões e outras métricas. No caso do espaço-tempo de Minkowski a métrica não é euclidiana. Neste caso, como se verá mais à frente, considera-se a álgebra geométrica $Cl_{1,3}$ que radica no espaço quadrático $\mathbb{R}^{1,3}$. Na breve introdução que aqui se faz apenas se considera a álgebra Cl_3 .

A definição essencial da álgebra geométrica é o produto geométrico (ou de Clifford) entre vectores. Consideremos, então, o espaço linear \mathbb{R}^3 com a usual métrica euclideana. Seja $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ uma base ortonormada deste espaço, i.e.,

$$j, k \in \{1, 2, 3\} \rightarrow \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}$$

de modo que $|\mathbf{e}_1| = |\mathbf{e}_2| = |\mathbf{e}_3| = 1$. Dado um vector $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 \in \mathbb{R}^3$, o respectivo comprimento será dado por

$$|\mathbf{r}| = \sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \geq 0.$$

Definamos, agora, um produto entre vectores – dito produto geométrico ou de Clifford – tal que, ao multiplicar o vector \mathbf{r} por ele próprio, $\mathbf{r}\mathbf{r} = \mathbf{r}^2$, se obtenha o quadrado do seu comprimento, i.e.,

$$\text{axioma fundamental de } C\ell_3 \rightarrow \boxed{\mathbf{r}^2 = |\mathbf{r}|^2}.$$

Em particular, tem-se $\mathbf{e}_1^2 = |\mathbf{e}_1|^2 = 1$, $\mathbf{e}_2^2 = |\mathbf{e}_2|^2 = 1$ e $\mathbf{e}_3^2 = |\mathbf{e}_3|^2 = 1$. Se não se considerar, à partida, que este produto é (necessariamente) comutativo, vem

$$|\mathbf{r}|^2 = x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \begin{cases} \mathbf{r}^2 = (x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3)(x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3) \\ = |\mathbf{r}|^2 + xy(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1) + xz(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1) + yz(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2) \end{cases}$$

$$\therefore \mathbf{r}^2 = |\mathbf{r}|^2 \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 \end{cases}.$$

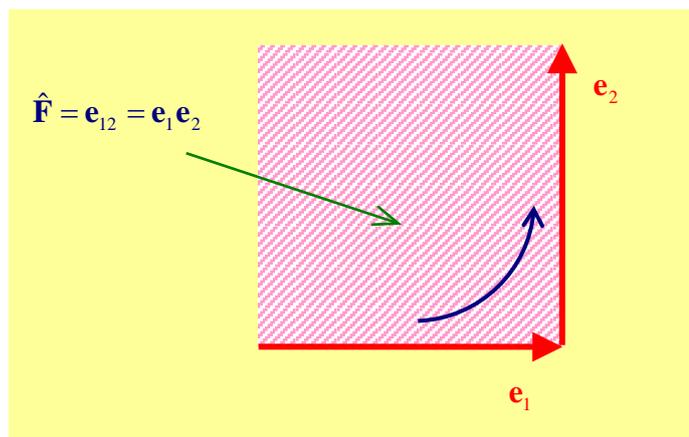
Assim, a primeira característica do produto geométrico é a seguinte: este produto não pode ser comutativo no caso geral. Admitamos, porém, que ele é associativo, i.e., que

$$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3 \rightarrow \boxed{(\mathbf{a}\mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b}\mathbf{c})} \leftarrow \text{associatividade do produto geométrico}.$$

Obtém-se então

$$(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)^2 = (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2 = -(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1)(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2) = -\mathbf{e}_1^2\mathbf{e}_2^2 = -1.$$

Este resultado mostra que o objecto geométrico $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ não pode ser nem um escalar nem um vector: o quadrado de $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ é um número negativo. De facto, este é um objecto geométrico de tipo novo a que se dá o nome de *bivector*. Um bivector é um segmento de plano orientado. Na figura anexa indica-se o quadrado orientado que corresponde ao



bivector unitário $\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{e}_{12} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$. Analogamente se definem os bivectores unitários $\mathbf{e}_{31} = \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_{23} = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$. Deste modo, o produto geométrico de dois vectores $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, com $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$ e $\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3$, será

produto geométrico (de Clifford)	→	$\mathbf{ab} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$
produto interno (ou escalar)	→	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$
produto exterior (de Grassmann)	→	$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_{23} & \mathbf{e}_{31} & \mathbf{e}_{12} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$

O produto interno é conhecido: $\alpha = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \in \mathbb{R}$. A definição de produto geométrico, porém, implica a existência de um outro produto: o produto exterior que gera um bivector $\mathbf{F} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$:

$$\mathbf{F} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{e}_{23} + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \mathbf{e}_{31} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{e}_{12} \in \bigwedge^2 \mathbb{R}^3.$$

O objecto $u = \mathbf{ab}$ é, assim, a soma graduada de um escalar α com um bivector \mathbf{F} :

$$\text{soma graduada} \rightarrow \mathbf{ab} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \in \mathbb{R} \oplus \bigwedge^2 \mathbb{R}^3.$$

simetria	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$
anti-simetria	$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$

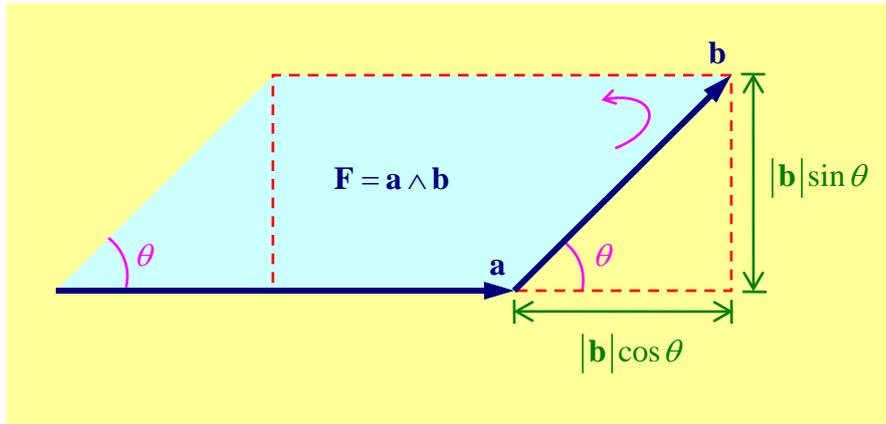
$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{ab} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \\ \mathbf{ba} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{2}(\mathbf{ab} + \mathbf{ba}) \in \mathbb{R} \leftarrow \mathbf{ab} + \mathbf{ba} = (\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 - \mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2 \in \mathbb{R} \\ \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \frac{1}{2}(\mathbf{ab} - \mathbf{ba}) \end{array} \right.$$

$$\therefore \left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^2 = (\mathbf{ab} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{ba}) \\ = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{ab} + \mathbf{ba}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 - \mathbf{abba} \\ = 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 - \mathbf{a}^2 \mathbf{b}^2 \\ = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 - \mathbf{a}^2 \mathbf{b}^2 \end{array} \right.$$

$$\theta = \sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \rightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta$$

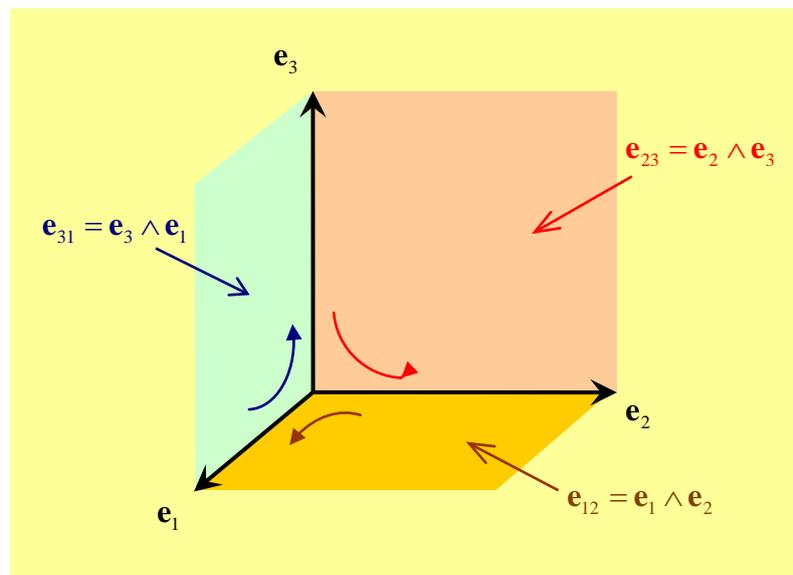
$$\therefore (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 \mathbf{b}^2 \cos^2 \theta - \mathbf{a}^2 \mathbf{b}^2 = -\mathbf{a}^2 \mathbf{b}^2 \sin^2 \theta.$$

Este último resultado mostra que $|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta$. Assim, o bivector $\mathbf{F} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ é representado pelo paralelogramo orientado da figura anexa.



A definição do produto geométrico $u = \mathbf{a}\mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ entre dois vectores $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ codifica geometricamente a relação entre eles como a seguir se indica:

$\mathbf{a}\mathbf{b} = \mathbf{b}\mathbf{a}$	\Leftrightarrow	$\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$	\Leftrightarrow	$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 0$	\Leftrightarrow	$\mathbf{a}\mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$
$\mathbf{a}\mathbf{b} = -\mathbf{b}\mathbf{a}$	\Leftrightarrow	$\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$	\Leftrightarrow	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$	\Leftrightarrow	$\mathbf{a}\mathbf{b} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$

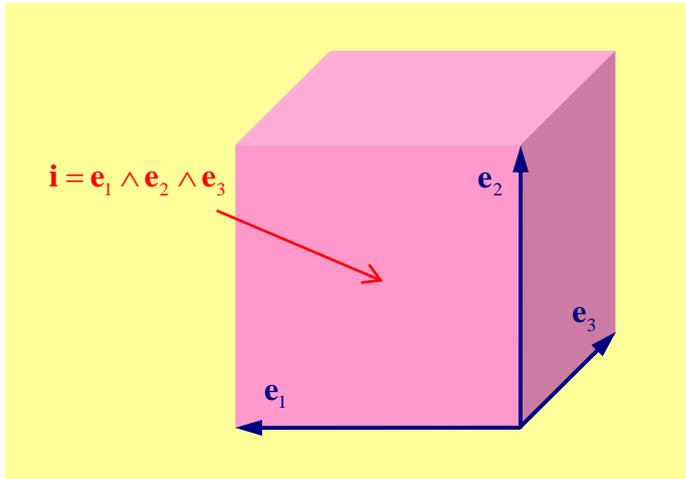


O subespaço $\wedge^2 \mathbb{R}^3$ dos bivectores tem uma base $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_{23}, \mathbf{e}_{31}, \mathbf{e}_{12}\}$ pelo que $\dim(\wedge^2 \mathbb{R}^3) = 3$.

$$\begin{cases} j, k \in \{1, 2, 3\} \\ j \neq k \end{cases} \rightarrow \mathbf{e}_{jk}^2 = (\mathbf{e}_j \mathbf{e}_k)^2 = (\mathbf{e}_j \wedge \mathbf{e}_k)^2 = -1$$

Em relação ao produto exterior o produto geométrico tem a enorme vantagem de ser invertível. Contudo, ao contrário do produto exterior de Grassmann (não confundir com o produto externo de Gibbs, só definível em três dimensões), o produto geométrico depende de uma métrica: $\mathbf{a}^2 = \mathbf{a}\mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$ para $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$.

$$\text{invertibilidade (Apêndice A)} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{a}^{-1} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{a}^2} \\ \mathbf{b}^{-1} = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{b}^2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{u = \mathbf{a}\mathbf{b} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{a} = u\mathbf{b}^{-1} \\ \mathbf{b} = \mathbf{a}^{-1}u \\ u^{-1} = \mathbf{b}^{-1}\mathbf{a}^{-1} \end{cases}}$$



O produto exterior de três vectores dá origem, por sua vez, a um *trivector* ou volume orientado. O trivector unitário da álgebra é, neste caso, \mathbf{e}_{123} . Tem-se

$$\mathbf{i} = \hat{\mathbf{V}} = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3.$$

Tal como um bivector, um trivector tem um quadrado negativo.

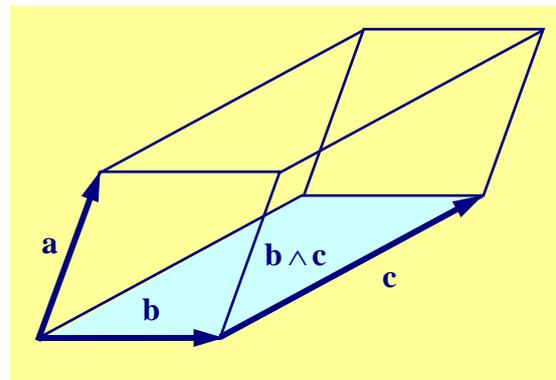
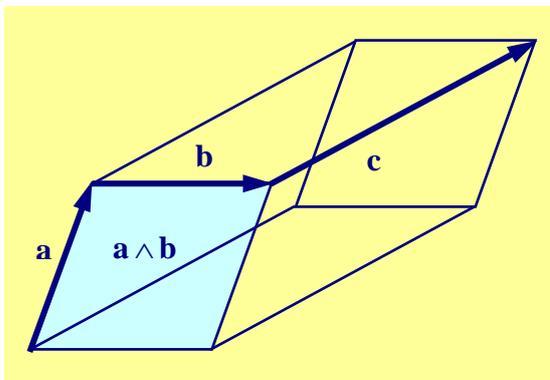
$$\text{reverso de } \mathbf{e}_{123} \rightarrow \tilde{\mathbf{e}}_{123} = \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_{123}$$

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{e}_{123}^2 = \mathbf{e}_{123} \mathbf{e}_{123} = -\mathbf{e}_{123} \tilde{\mathbf{e}}_{123} = -(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3)(\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1) = -\mathbf{e}_1^2 \mathbf{e}_2^2 \mathbf{e}_3^2 = -1$$

$$\boxed{\text{trivector ou pseudoescalar}} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{V} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_{123} = \beta \mathbf{e}_{123} = \beta \hat{\mathbf{V}} = \beta \mathbf{i} \in \wedge^3 \mathbb{R}^3 \\ \beta = a_1(b_2 c_3 - b_3 c_2) + a_2(b_3 c_1 - b_1 c_3) + a_3(b_1 c_2 - b_2 c_1) \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\therefore \mathbf{V}^2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c})^2 = (\beta \mathbf{i}^2) = -\beta^2$$

$$\text{associatividade do produto exterior} \rightarrow \boxed{(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} = \mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}}$$



Nota: O trivector $\mathbf{V} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ é o dual do (pseudo)escalar da álgebra vectorial de Gibbs a que se dá o nome de triplo produto escalar (ou produto misto) $\beta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ tal que

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

que, como é sabido, observa a permutação cíclica

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \times \mathbf{a} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{b}.$$

Nota: Depois de se introduzir a contracção à esquerda (mais à frente), pode efectivamente demonstrar-se que:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) \\ &= \underbrace{\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3)}_0 + \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \\ &= \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Regra de Cramer: Facilmente se determinam as componentes α, β, γ da decomposição de um vector $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ em termos de outros três vectores conhecidos $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$. Pretende-se, portanto, resolver o sistema de equações lineares

$$\text{sistema linear} \rightarrow \mathbf{r} = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c}$$

em ordem a α, β, γ . Vem sucessivamente

$$\begin{cases} \mathbf{r} \wedge \mathbf{a} = \beta (\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}) + \gamma (\mathbf{c} \wedge \mathbf{a}) \\ \mathbf{r} \wedge \mathbf{b} = \alpha (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) + \gamma (\mathbf{c} \wedge \mathbf{b}) \\ \mathbf{r} \wedge \mathbf{c} = \alpha (\mathbf{a} \wedge \mathbf{c}) + \beta (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{r} \wedge \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \gamma (\mathbf{c} \wedge \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \\ \mathbf{r} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = \alpha (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \\ \mathbf{r} \wedge \mathbf{c} \wedge \mathbf{a} = \beta (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \wedge \mathbf{a}) \end{cases}$$

$$\text{solução} \rightarrow \alpha = \frac{\mathbf{r} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}}{\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}}, \quad \beta = \frac{\mathbf{r} \wedge \mathbf{c} \wedge \mathbf{a}}{\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}}, \quad \gamma = \frac{\mathbf{r} \wedge \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}}{\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}}.$$

Esta é a expressão da *regra de Cramer* em álgebra geométrica.

1.2 Álgebra geométrica do espaço

Estamos agora em condições de caracterizar a estrutura algébrica de Cl_3 definida no espaço tridimensional euclidiano \mathbb{R}^3 .

$$\text{subespaços de } Cl_3 \rightarrow \begin{array}{|l|l|} \hline \text{escalares} & \mathbb{R} \\ \hline \text{vectores} & \mathbb{R}^3 \\ \hline \text{bivectores} & \wedge^2 \mathbb{R}^3 \\ \hline \text{trivectores} & \wedge^3 \mathbb{R}^3 \\ \hline \end{array} \rightarrow Cl_3 = \underbrace{\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3 \oplus \wedge^2 \mathbb{R}^3 \oplus \wedge^3 \mathbb{R}^3}_{\text{soma directa (graduada)}}$$

$$\text{base de } Cl_3 \rightarrow \mathcal{B} = \{1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_{23}, \mathbf{e}_{31}, \mathbf{e}_{12}, \mathbf{e}_{123}\}$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 3 & 3 & 1 \\ \hline \end{array} \quad \dim(Cl_3) = 1 + 3 + 3 + 1 = 2^3 = 8$$

1	{ $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ }	{ $\mathbf{e}_{23}, \mathbf{e}_{31}, \mathbf{e}_{12}$ }	\mathbf{e}_{123}
↕	↕	↕	↕
escalares	vectores	bivectores	pseudoescalares

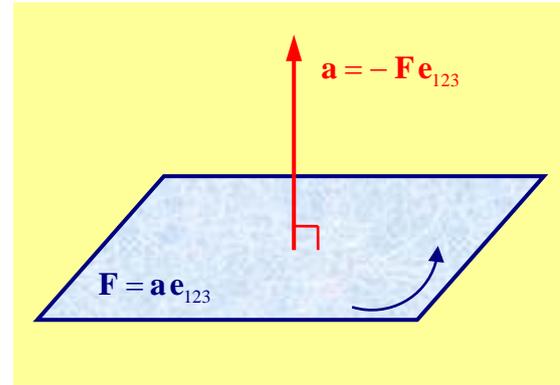
Definição: Dá-se o nome de *multivector* a um elemento genérico u da álgebra. É habitual chamar *pseudoescalar* a qualquer multivector homogéneo da álgebra com o maior grau possível (grau 3, na álgebra geométrica do espaço em que cada pseudoescalar é um trivector).

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \in \wedge^0 \mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \\ \mathbf{a} \in \wedge^1 \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{F} \in \wedge^2 \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3 \wedge \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{V} \in \wedge^3 \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3 \wedge \mathbb{R}^3 \wedge \mathbb{R}^3 \end{array} \right. \rightarrow \boxed{u = \underbrace{\alpha}_{\langle u \rangle_0} + \underbrace{\mathbf{a}}_{\langle u \rangle_1} + \underbrace{\mathbf{F}}_{\langle u \rangle_2} + \underbrace{\mathbf{V}}_{\langle u \rangle_3} \in Cl_3} \leftarrow \text{multivector}$$

Notação: Representa-se por $\langle u \rangle_k$ a projecção de u em relação ao grau k (i.e., a dimensão do subespaço $\wedge^k \mathbb{R}^3$). Uma lâmina- k da álgebra Cl é um elemento u_k tal que $u_k = \langle u_k \rangle_k$, onde $\langle u_k \rangle_k$ é um elemento homogéneo de grau k e resulta do produto exterior de um (ou mais) vectores.

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_{123} = \mathbf{e}_1 (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3) = (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1) (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1^2 \mathbf{e}_{23} = \mathbf{e}_{23} \\ \mathbf{e}_{23} \mathbf{e}_{123} = (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3) (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1 (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3)^2 = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_{23}^2 = -\mathbf{e}_1 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} \mathbf{a} \mathbf{e}_{123} = \mathbf{F} \\ \mathbf{F} \mathbf{e}_{123} = -\mathbf{a} \end{cases}$$

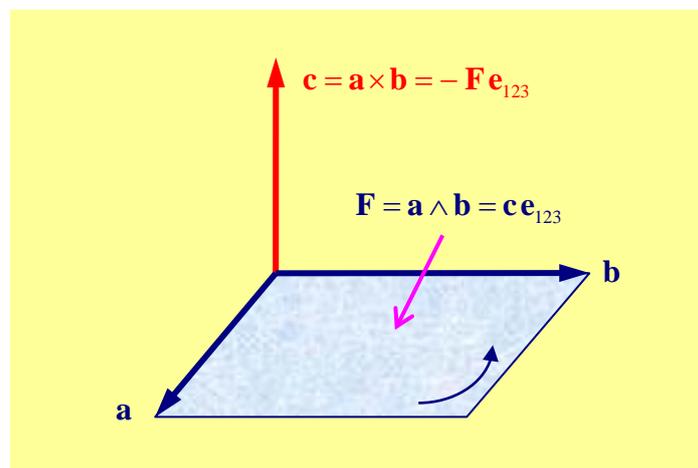


Dualidade: Dado um multivector genérico $u \in Cl_3$ define-se o correspondente *dual de Clifford* como sendo o novo multivector $v = u \mathbf{e}_{123} \in Cl_3$ tal que

$$u = \alpha + \mathbf{a} + \mathbf{b} \mathbf{e}_{123} + \beta \mathbf{e}_{123} \quad \mapsto \quad v = u \mathbf{e}_{123} = -\beta - \mathbf{b} + \mathbf{a} \mathbf{e}_{123} + \alpha \mathbf{e}_{123}.$$

Assim, em particular: (i) o dual de um escalar (resp., pseudoescalar) é um pseudoescalar (resp., escalar); (ii) o dual de um vector (resp., bivector) é um bivector (resp., vector).

Estas considerações sobre dualidade permitem, desde já, estabelecer de que forma é que o conhecido produto externo de Gibbs se relaciona com a álgebra geométrica Cl_3 . Apenas em \mathbb{R}^3 é que o dual de um vector (resp., bivector) é um bivector (resp., vector): só em \mathbb{R}^3 é que é possível definir produto externo – ao contrário do produto exterior de Grassmann.



produto externo de Gibbs	$\rightarrow \quad \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \mathbf{e}_{23} & \mathbf{e}_{31} & \mathbf{e}_{12} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_{123} = -(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \mathbf{e}_{123}$
-----------------------------	--

$$\therefore \quad \boxed{\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \mathbf{e}_{123} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \mathbf{e}_{123}}$$

Comentário sobre a estrutura algébrica: A álgebra Cl_3 compreende várias estruturas algébricas dentro de si. Define-se a *parte par* Cl_3^+ (resp., *parte ímpar* Cl_3^-) como sendo composta pelos elementos de Cl_3 que resultam do produto geométrico de um número par (resp., ímpar) de vectores de \mathbb{R}^3 . Assim

$$\begin{cases} Cl_3^+ = \mathbb{R} \oplus \bigwedge^2 \mathbb{R}^3 \\ Cl_3^- = \mathbb{R}^3 \oplus \bigwedge^3 \mathbb{R}^3 \end{cases} .$$

Apenas a parte par Cl_3^+ constitui uma subálgebra: a parte ímpar Cl_3^- não é fechada em relação ao produto geométrico. Define-se o *centro* de uma álgebra como o conjunto dos seus elementos que comutam com todos os elementos da álgebra. Apresenta-se, sem demonstração, a seguinte proposição: as únicas subálgebras de Cl_3 são o seu centro, $Cen(Cl_3)$, e a sua parte par Cl_3^+ . Tem-se

$$Cen(Cl_3) = \mathbb{R} \oplus \bigwedge^3 \mathbb{R}^3 .$$

A parte par Cl_3^+ é isomorfa ao anel de divisão \mathbb{H} dos quaterniões de Hamilton (Apêndice B) enquanto que o seu centro $Cen(Cl_3)$ é isomorfo ao corpo dos complexos.

$$\begin{cases} Cen(Cl_3) \simeq \mathbb{C} \\ Cl_3^+ \simeq \mathbb{H} \end{cases}$$

Nota importante: Enquanto que o produto externo de Gibbs depende da métrica, o produto exterior de Grassmann não depende de qualquer métrica. O produto exterior é associativo; o produto externo não é associativo

$$\boxed{\text{não associatividade do produto externo}} \rightarrow (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} - \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a})$$

e observa a identidade de Jacobi (a álgebra de Gibbs constitui uma álgebra de Lie)

$$\begin{cases} \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \\ \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a} \\ \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}} .$$

Sobre o produto externo (de Gibbs) veja-se o Apêndice C.

TABELA MULTIPLICATIVA DE Cl_3

\nearrow	\mathbf{e}_1	\mathbf{e}_2	\mathbf{e}_3	\mathbf{e}_{12}	\mathbf{e}_{23}	\mathbf{e}_{31}	\mathbf{e}_{123}
\mathbf{e}_1	1	\mathbf{e}_{12}	$-\mathbf{e}_{31}$	\mathbf{e}_2	\mathbf{e}_{123}	$-\mathbf{e}_3$	\mathbf{e}_{23}
\mathbf{e}_2	$-\mathbf{e}_{12}$	1	\mathbf{e}_{23}	$-\mathbf{e}_1$	\mathbf{e}_3	\mathbf{e}_{123}	\mathbf{e}_{31}
\mathbf{e}_3	\mathbf{e}_{31}	$-\mathbf{e}_{23}$	1	\mathbf{e}_{123}	$-\mathbf{e}_2$	\mathbf{e}_1	\mathbf{e}_{12}
\mathbf{e}_{12}	$-\mathbf{e}_2$	\mathbf{e}_1	\mathbf{e}_{123}	-1	$-\mathbf{e}_{31}$	\mathbf{e}_{23}	$-\mathbf{e}_3$
\mathbf{e}_{23}	\mathbf{e}_{123}	$-\mathbf{e}_3$	\mathbf{e}_2	\mathbf{e}_{31}	-1	$-\mathbf{e}_{12}$	$-\mathbf{e}_1$
\mathbf{e}_{31}	\mathbf{e}_3	\mathbf{e}_{123}	$-\mathbf{e}_1$	$-\mathbf{e}_{23}$	\mathbf{e}_{12}	-1	$-\mathbf{e}_2$
\mathbf{e}_{123}	\mathbf{e}_{23}	\mathbf{e}_{31}	\mathbf{e}_{12}	$-\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_1$	$-\mathbf{e}_2$	-1

Exemplo: Calculemos o quadrado do multivector $u = \mathbf{a} + \mathbf{b}\mathbf{e}_{123}$, com $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$. Vem

$$\begin{aligned} u^2 &= (\mathbf{a} + \mathbf{b}\mathbf{e}_{123})^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b}\mathbf{e}_{123})(\mathbf{a} + \mathbf{b}\mathbf{e}_{123}) \\ &= \mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2 + (\mathbf{a}\mathbf{b} + \mathbf{b}\mathbf{a})\mathbf{e}_{123} = \mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2 + 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{e}_{123}. \end{aligned}$$

Grau máximo: Facilmente se demonstra que não existem lâminas-4 em Cl_3 . Ou seja, dados quatro vectores $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$ tem-se necessariamente $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \wedge \mathbf{d} = 0$. De facto, em \mathbb{R}^3 só três vectores é que podem ser linearmente independentes. Isto significa que, e.g., o vector \mathbf{d} é necessariamente uma combinação linear dos outros três (que, por hipótese, constituem uma base de \mathbb{R}^3)

$$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{d} = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c}.$$

Mas então, vem efectivamente

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \wedge \mathbf{d} &= \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \wedge (\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c}) \\ &= \alpha \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \wedge \mathbf{a} + \beta \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \wedge \mathbf{b} + \gamma \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \wedge \mathbf{c} \\ &= 0. \end{aligned}$$

O grau máximo de uma lâmina de Cl_3 é, portanto, o grau 3.

1.3 Rotores e contracções

Na álgebra geométrica existem operadores, chamados rotores, que desempenham um papel muito útil enquanto geradores de rotações (de rotações espaciais «stricto sensu», no caso de Cl_3 , ou de rotações espaciais e de transformações de Lorentz activas ou «boosts», no caso de $Cl_{1,3}$). Concentremos, de momento, a atenção sobre os rotores em Cl_3 .

Definição: Sejam $\mathbf{n}, \mathbf{m} \in \mathbb{R}^3$ dois vectores unitários, i.e., tais que $\mathbf{n}^2 = \mathbf{m}^2 = 1$. Define-se um rotor como sendo o produto geométrico $R = \mathbf{n} \mathbf{m}$.

Note-se que, da definição, resulta que

$$R \tilde{R} = (\mathbf{n} \mathbf{m})(\mathbf{m} \mathbf{n}) = \mathbf{n}^2 \mathbf{m}^2 = 1 \Rightarrow \boxed{R \tilde{R} = 1}.$$

Da definição resulta, ainda, que o multivector $R \in Cl_3$ é tal que $R = \langle R \rangle_0 + \langle R \rangle_2$, tendo-se

$$\begin{cases} \langle R \rangle_0 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} = \cos \theta \\ \langle R \rangle_2 = \mathbf{n} \wedge \mathbf{m} = \hat{\mathbf{B}} \sin \theta \end{cases}$$

onde $\hat{\mathbf{B}} \in \bigwedge^2 \mathbb{R}^3$ é um bivector unitário, i.e., $\hat{\mathbf{B}}^2 = -1$. Logo, infere-se a seguinte versão da fórmula de Euler

$$\text{fórmula de Euler em } Cl_3 \rightarrow \cos \theta + \hat{\mathbf{B}} \sin \theta = \exp(\theta \hat{\mathbf{B}})$$

$$\therefore \text{ rotor em } Cl_3 \rightarrow \boxed{R = \mathbf{n} \mathbf{m} = \exp(\theta \hat{\mathbf{B}})}.$$

Nota: Para demonstrar a fórmula de Euler em Cl_3 basta ter em consideração que

$$\hat{\mathbf{B}}^2 = -1 \Rightarrow \hat{\mathbf{B}}^{2k} = (-1)^k \Rightarrow \hat{\mathbf{B}}^{2k+1} = (-1)^k \hat{\mathbf{B}}.$$

$$\begin{aligned} \therefore \left| \begin{aligned} \exp(\theta \hat{\mathbf{B}}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^k}{k!} \hat{\mathbf{B}}^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^{2k}}{(2k)!} \hat{\mathbf{B}}^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!} \hat{\mathbf{B}}^{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2k}}{(2k)!} + \hat{\mathbf{B}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \cos \theta + \hat{\mathbf{B}} \sin \theta. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Problema: Suponhamos que conhecemos os vectores (\mathbf{u}, \mathbf{v}) que definem o rotor $R^2 = \mathbf{v}\mathbf{u}$, com $\mathbf{u}^2 = \mathbf{v}^2 = 1$, tal que

$$\mathbf{v}\mathbf{u} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{u} = \cos \theta + \hat{\mathbf{B}} \sin \theta = \exp(\theta \hat{\mathbf{B}}),$$

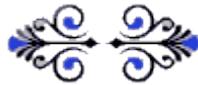
e se pretende calcular o rotor $R = \mathbf{n}\mathbf{m}$, i.e., a sua raiz quadrada. Como $R\tilde{R} = 1$, tem-se $R^2 + 1 = (R + \tilde{R})R$. Porém, $R + \tilde{R} = 2\langle R \rangle_0 R$, pelo que

$$R = \frac{1 + R^2}{2\langle R \rangle_0} = \frac{1 + \mathbf{v}\mathbf{u}}{2\langle R \rangle_0} \Rightarrow \tilde{R} = \frac{1 + \mathbf{u}\mathbf{v}}{2\langle R \rangle_0}.$$

Logo

$$R\tilde{R} = \frac{1 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{2\langle R \rangle_0^2} = 1 \Rightarrow \langle R \rangle_0 = \sqrt{\frac{1 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{2}}$$

$$\therefore \boxed{R = \mathbf{n}\mathbf{m} = \frac{1 + \mathbf{v}\mathbf{u}}{\sqrt{2(1 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{u})}}}.$$



Duas operações importantes da álgebra geométrica são a contração à esquerda e a contração à direita. Começemos por introduzir a *contração à esquerda*. Analisemos, então, qual a natureza do produto geométrico de um vector \mathbf{a} por um bivector $\mathbf{B} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$.

$$u = \mathbf{a}\mathbf{B} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \in Cl_3$$

Vem sucessivamente

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) &= \frac{1}{2}\mathbf{a}(\mathbf{b}\mathbf{c} - \mathbf{c}\mathbf{b}) = \frac{1}{2}(\mathbf{a}\mathbf{b})\mathbf{c} - \frac{1}{2}(\mathbf{a}\mathbf{c})\mathbf{b} \\ &= \frac{1}{2}[2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{b}\mathbf{a}]\mathbf{c} - \frac{1}{2}[2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}\mathbf{a}]\mathbf{b} \\ &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - \frac{1}{2}(\mathbf{b}\mathbf{a}\mathbf{c} - \mathbf{c}\mathbf{a}\mathbf{b}). \end{aligned}$$

Mas, por outro lado,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}(\mathbf{bac} - \mathbf{cab}) &= \frac{1}{2}\mathbf{b}(\mathbf{ac}) - \frac{1}{2}\mathbf{c}(\mathbf{ab}) \\
 &= \frac{1}{2}\mathbf{b}[2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{ca}] - \frac{1}{2}\mathbf{c}[2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{ba}] \\
 &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} - \frac{1}{2}(\mathbf{bca} - \mathbf{cba}) \\
 &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} - \frac{1}{2}(\mathbf{bc} - \mathbf{cb})\mathbf{a} \\
 &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} - (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})\mathbf{a}
 \end{aligned}$$

pelo que, após substituir esta última expressão no resultado precedente, vem

$$\mathbf{a}(\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - [(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} - (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})\mathbf{a}]$$

$$\therefore \mathbf{a}(\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) - (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})\mathbf{a} = 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} - 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b}.$$

$$\text{conclusão} \rightarrow \boxed{\mathbf{aB} - \mathbf{Ba} = 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} - 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3}.$$

Define-se, então, a *contração à esquerda*

$$\text{contração à esquerda} \rightarrow \boxed{\mathbf{a} \lrcorner \mathbf{B} = \frac{1}{2}(\mathbf{aB} - \mathbf{Ba})}.$$

Desta definição resulta imediatamente

$$\boxed{\text{regra fundamental da contração à esquerda}} \rightarrow \boxed{\mathbf{a} \lrcorner (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b}}.$$

Nota: Esta é a regra dual da conhecida regra *bac-cab* da álgebra vectorial de Gibbs:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}).$$

A operação $\mathbf{a} \lrcorner \mathbf{B}$ faz com que o grau 2 do bivector \mathbf{B} se reduza ao grau 1 do vector \mathbf{a} .

Analogamente define-se uma *contração à direita*

$$\text{contração à direita} \rightarrow \boxed{\mathbf{B} \llcorner \mathbf{a} = \frac{1}{2}(\mathbf{Ba} - \mathbf{aB})}$$

$$\therefore \boxed{\text{anti-simetria entre a contração à esquerda e a contração à direita}} \rightarrow \boxed{\mathbf{a} \lrcorner \mathbf{B} = -\mathbf{B} \llcorner \mathbf{a}}.$$

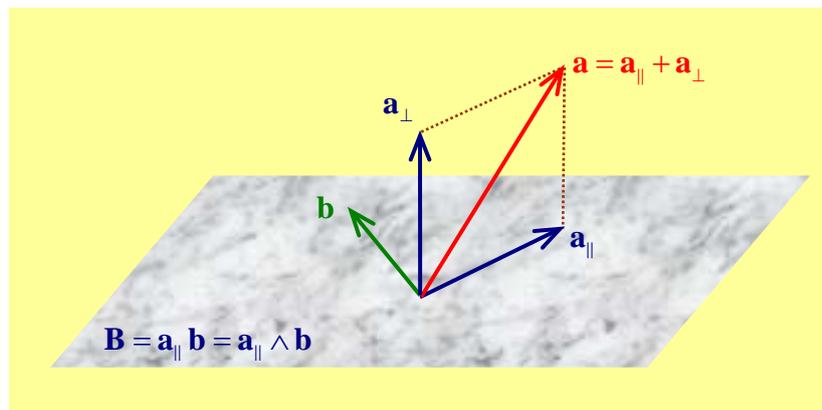
Consideremos a seguinte decomposição em partes par e ímpar:

$$\boxed{\text{produto geométrico de um vector com um bivector}} \rightarrow u = \mathbf{a}\mathbf{B} = \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{a}\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{a})}_{\text{parte ímpar}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{a}\mathbf{B} + \mathbf{B}\mathbf{a})}_{\text{parte par}}.$$

O produto geométrico de um vector \mathbf{a} por um bivector \mathbf{B} é, em geral, a soma (graduada) de um vector com um trivector. Para entender esta afirmação basta considerar a decomposição $\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\parallel} + \mathbf{a}_{\perp}$ em que \mathbf{a}_{\parallel} se encontra no plano definido por \mathbf{B} . Então, considerando um vector \mathbf{b} perpendicular a \mathbf{a}_{\parallel} ($\mathbf{a}_{\parallel} \cdot \mathbf{b} = 0$) e também localizado em \mathbf{B} , tal que $\mathbf{B} = \mathbf{a}_{\parallel} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{a}_{\parallel} \mathbf{b}$, vem $\mathbf{a}_{\parallel} \mathbf{B} = \mathbf{a}_{\parallel}^2 \mathbf{b}$ que é um vector. Mas, por outro lado, $\mathbf{a}_{\perp} \mathbf{B} = \mathbf{a}_{\perp} (\mathbf{a}_{\parallel} \wedge \mathbf{b}) = \mathbf{a}_{\perp} \mathbf{a}_{\parallel} \mathbf{b}$ é o produto de três vectores ortogonais entre si e, conseqüentemente, é um trivector. Ou seja,

$$\mathbf{a}\mathbf{B} = (\mathbf{a}_{\parallel} + \mathbf{a}_{\perp})\mathbf{B} = \mathbf{a}_{\parallel}^2 \mathbf{b} + \mathbf{a}_{\perp} \wedge \mathbf{a}_{\parallel} \wedge \mathbf{b}$$

é efectivamente a soma de um vector com um trivector (ver figura anexa).



$$u = \mathbf{a}\mathbf{B} = \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{a}\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{a})}_{\text{vector}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{a}\mathbf{B} + \mathbf{B}\mathbf{a})}_{\text{trivector}} \in \mathbb{R}^3 \oplus \overset{3}{\wedge} \mathbb{R}^3$$

$$\therefore \begin{cases} \frac{1}{2}(\mathbf{a}\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{a}) = \mathbf{a} \lrcorner \mathbf{B} \in \mathbb{R}^3 \\ \frac{1}{2}(\mathbf{a}\mathbf{B} + \mathbf{B}\mathbf{a}) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{B} \in \overset{3}{\wedge} \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{simetria do produto exterior de um vector com um bivector}} \rightarrow \boxed{\mathbf{a} \wedge \mathbf{B} = \mathbf{B} \wedge \mathbf{a}}$$

$$\boxed{\text{produto geométrico de um vector por um bivector}} \rightarrow \boxed{\begin{aligned} \mathbf{a}\mathbf{B} &= \mathbf{a} \lrcorner \mathbf{B} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{B} \\ \mathbf{B}\mathbf{a} &= \mathbf{B} \lrcorner \mathbf{a} + \mathbf{B} \wedge \mathbf{a} \end{aligned}}$$

Verifica-se, deste modo, que se tem:

$$\left| \begin{aligned} \mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \mathbf{e}_{123}) &= \frac{1}{2} [\mathbf{a}(\mathbf{b} \mathbf{e}_{123}) + (\mathbf{b} \mathbf{e}_{123}) \mathbf{a}] \\ &= \frac{1}{2} [(\mathbf{a} \mathbf{b}) \mathbf{e}_{123} + (\mathbf{b} \mathbf{a}) \mathbf{e}_{123}] \quad \therefore \quad \boxed{\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \mathbf{e}_{123}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{e}_{123}} \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{a} \mathbf{b} + \mathbf{b} \mathbf{a}) \mathbf{e}_{123} \end{aligned} \right.$$

$$\left| \begin{aligned} \mathbf{a} \wedge [(\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \mathbf{e}_{123}] &= \frac{1}{2} [\mathbf{a}(\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \mathbf{e}_{123} - (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \mathbf{a} \mathbf{e}_{123}] \\ &= \frac{1}{2} [\mathbf{a}(\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) - (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \mathbf{a}] \mathbf{e}_{123} \\ &= [\mathbf{a} \lrcorner (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})] \mathbf{e}_{123} \\ \therefore \quad \boxed{\mathbf{a} \wedge [(\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \mathbf{e}_{123}] &= [(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b}] \mathbf{e}_{123}} \end{aligned} \right.$$

$$\left| \begin{aligned} \mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) &= \frac{1}{2} [\mathbf{a}(\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) + (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \mathbf{a}] \\ &= \frac{1}{2} [\mathbf{a}(\mathbf{b} \mathbf{c} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{c} \mathbf{b}) \mathbf{a}] \quad \therefore \quad \boxed{\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = \frac{1}{2} (\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c} - \mathbf{c} \mathbf{b} \mathbf{a})} \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c} - \mathbf{c} \mathbf{b} \mathbf{a}) \end{aligned} \right.$$

$$\left| \begin{aligned} \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} &= \frac{1}{3} (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} + \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \wedge \mathbf{a} + \mathbf{c} \wedge \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \\ &= \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} (\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c} - \mathbf{c} \mathbf{b} \mathbf{a}) + \frac{1}{2} (\mathbf{b} \mathbf{c} \mathbf{a} - \mathbf{a} \mathbf{c} \mathbf{b}) + \frac{1}{2} (\mathbf{c} \mathbf{a} \mathbf{b} - \mathbf{b} \mathbf{a} \mathbf{c}) \right] \\ \therefore \quad \boxed{\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} &= \frac{1}{6} (\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c} + \mathbf{b} \mathbf{c} \mathbf{a} + \mathbf{c} \mathbf{a} \mathbf{b} - \mathbf{c} \mathbf{b} \mathbf{a} - \mathbf{a} \mathbf{c} \mathbf{b} - \mathbf{b} \mathbf{a} \mathbf{c})} \end{aligned} \right.$$

Clarifiquemos a interpretação geométrica associada às duas contracções. Notemos, para esse efeito, que

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{B} \mathbf{B}^{-1}) = (\mathbf{a} \mathbf{B}) \mathbf{B}^{-1} = \underbrace{(\mathbf{a} \lrcorner \mathbf{B}) \mathbf{B}^{-1}}_{\mathbf{a}_{\parallel}} + \underbrace{(\mathbf{a} \wedge \mathbf{B}) \mathbf{B}^{-1}}_{\mathbf{a}_{\perp}}$$

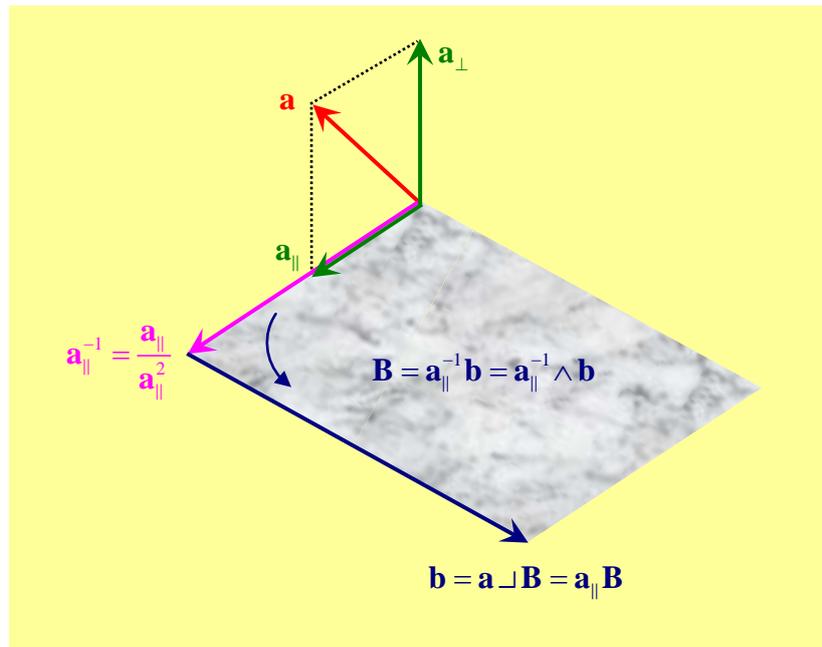
$$\therefore \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{B} = |\mathbf{B}| \hat{\mathbf{B}} \\ \mathbf{B}^{-1} = -\frac{1}{|\mathbf{B}|} \hat{\mathbf{B}} \end{array} \right. \rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \mathbf{a}_{\parallel} = (\mathbf{a} \lrcorner \mathbf{B}) \mathbf{B}^{-1} = -(\mathbf{a} \lrcorner \hat{\mathbf{B}}) \hat{\mathbf{B}} \\ \mathbf{a}_{\perp} = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{B}) \mathbf{B}^{-1} = -(\mathbf{a} \wedge \hat{\mathbf{B}}) \hat{\mathbf{B}} \end{array}} \Rightarrow \left\| \begin{array}{l} \mathbf{a}_{\parallel} \mathbf{B} = \mathbf{a} \lrcorner \mathbf{B} \\ \mathbf{a}_{\perp} \mathbf{B} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{B} \\ \mathbf{a}_{\parallel} \hat{\mathbf{B}} = \mathbf{a} \lrcorner \hat{\mathbf{B}} \\ \mathbf{a}_{\perp} \hat{\mathbf{B}} = \mathbf{a} \wedge \hat{\mathbf{B}} \end{array} \right\|$$

$$\boxed{\mathbf{a}_{\parallel} = (\mathbf{a} \lrcorner \mathbf{B}) \mathbf{B}^{-1} = (\hat{\mathbf{B}} \lrcorner \mathbf{a}) \hat{\mathbf{B}}}$$

Na figura anexa mostra-se a decomposição do vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ em duas componentes:

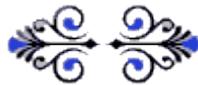
- Uma componente \mathbf{a}_{\parallel} contida no bivector \mathbf{B} ;
- Uma componente \mathbf{a}_{\perp} perpendicular ao bivector \mathbf{B} .

Note-se que o vector $\mathbf{b} \perp \mathbf{a}_{\parallel}$ é a contracção à esquerda $\mathbf{a} \lrcorner \mathbf{B} = \mathbf{a}_{\parallel} \mathbf{B}$ sendo, portanto, diametralmente oposto à contracção à direita $\mathbf{B} \lrcorner \mathbf{a} = -\mathbf{a}_{\parallel} \mathbf{B}$.



Nota importante: Quando $\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\perp}$ (i.e., o vector \mathbf{a} é perpendicular a \mathbf{B}) vem $\mathbf{a} \lrcorner \mathbf{B} = 0$.

Quando $\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\parallel}$ (i.e., o vector \mathbf{a} encontra-se no plano definido por \mathbf{B}) vem $\mathbf{a} \wedge \mathbf{B} = 0$.



A acção geométrica de um rotor sobre um dado vector é ilustrada na figura anexa da página seguinte. Tem-se

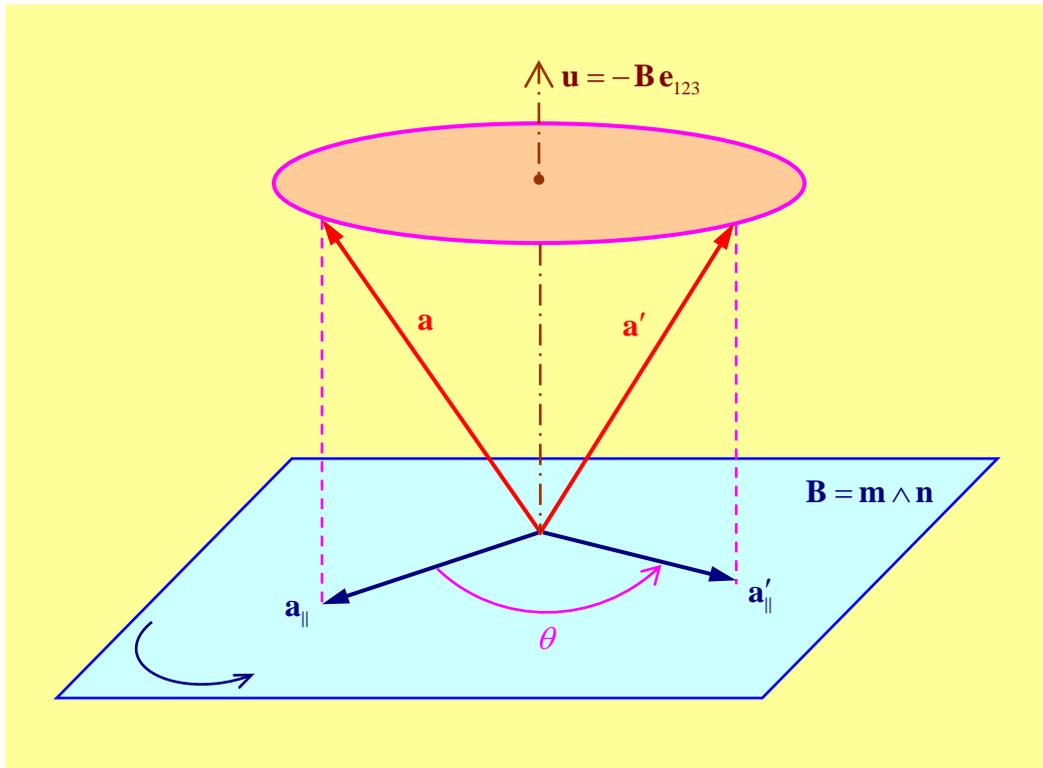
$$\left[\frac{\theta}{2} = \sphericalangle(\mathbf{n}, \mathbf{m}) \right] \rightarrow R = \mathbf{n} \mathbf{m} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} + \mathbf{n} \wedge \mathbf{m} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \hat{\mathbf{B}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\therefore \left[\mathbf{a} \mapsto \mathbf{a}' = R \mathbf{a} \tilde{R}, \quad R = \exp\left(-\hat{\mathbf{B}} \frac{\theta}{2}\right) \right]$$

que corresponde a uma rotação do vector $\mathbf{a} \in Cl_3$ de um ângulo θ no plano do bivector unitário $\hat{\mathbf{B}}$ (i.e., com $\hat{\mathbf{B}}^2 = -1$) e tal que

$$\hat{\mathbf{B}} = \frac{\mathbf{m} \wedge \mathbf{n}}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}, \quad \mathbf{m}^2 = \mathbf{n}^2 = 1,$$

no sentido ditado pela orientação deste bivector (i.e., de \mathbf{m} para \mathbf{n}).



Nota: Como $\hat{\mathbf{B}}^{-1} = \hat{\mathbf{B}} / \hat{\mathbf{B}}^2 = -\hat{\mathbf{B}}$, vem

$$\mathbf{a}_{\parallel} = (\mathbf{a}_{\perp} \hat{\mathbf{B}}) \hat{\mathbf{B}}^{-1} = -(\mathbf{a}_{\perp} \hat{\mathbf{B}}) \hat{\mathbf{B}}, \quad \mathbf{a}_{\perp} = (\mathbf{a}_{\parallel} \hat{\mathbf{B}}) \hat{\mathbf{B}}^{-1} = -(\mathbf{a}_{\parallel} \hat{\mathbf{B}}) \hat{\mathbf{B}}.$$

Mas então

$$\begin{cases} \mathbf{a}_{\perp} \hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{B}} \mathbf{a}_{\perp} & \Rightarrow \mathbf{a}_{\perp} R = R \mathbf{a}_{\perp} \\ \mathbf{a}_{\parallel} \hat{\mathbf{B}} = -\hat{\mathbf{B}} \mathbf{a}_{\parallel} & \Rightarrow \mathbf{a}_{\parallel} R = \tilde{R} \mathbf{a}_{\parallel} \end{cases}.$$

Daqui se infere que

$$\mathbf{a} \mapsto \mathbf{a}' = \mathbf{a}'_{\parallel} + \mathbf{a}'_{\perp}, \quad \mathbf{a}'_{\perp} = \mathbf{a}_{\perp}, \quad \mathbf{a}'_{\parallel} = R^2 \mathbf{a}_{\parallel}$$

onde, efectivamente,

$$R^2 = \exp(-\theta \hat{\mathbf{B}}).$$

Divisores de zero e paravectores: Na álgebra \mathcal{Cl}_3 existem divisores de zero, i.e., multivectores $p, q \in \mathcal{Cl}_3$ tais que $pq=0$ mas onde $p \neq 0$ e $q \neq 0$. Com efeito, basta considerar $q = \bar{p}$ (\bar{p} é o conjugado de Clifford de p) com ($\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$ é um vector unitário, com $\mathbf{n}^2 = 1$)

$$\text{divisores de zero} \rightarrow \begin{cases} p = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{n}) \\ \bar{p} = \frac{1}{2}(1 - \mathbf{n}) \end{cases} \Rightarrow \boxed{p\bar{p} = \bar{p}p = 0}.$$

Os *paravectores* (chama-se paravector ao multivector que resulta da soma de um escalar com um vector) considerados são idempotentes, i.e., tem-se $p^2 = p$ e $\bar{p}^2 = \bar{p}$. Note-se que $p + \bar{p} = 1$ e $p - \bar{p} = \mathbf{n}$. Além disso, introduzindo o bivector unitário $\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{n}\mathbf{e}_{123}$ ortogonal a \mathbf{n} (i.e., com $\mathbf{n} \lrcorner \hat{\mathbf{B}} = 0$ pelo que $\mathbf{n}\hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{B}}\mathbf{n}$), vem

$$(p + \bar{p}\hat{\mathbf{B}})^2 = p^2 - \bar{p}^2 + p\bar{p}\hat{\mathbf{B}} - \bar{p}p\hat{\mathbf{B}} = p - \bar{p} = \mathbf{n}$$

o que mostra que um vector pode ter raízes quadradas. Logo

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{B}}^2 = -1 &\Rightarrow \hat{\mathbf{B}}^{2k} = (-1)^k \Rightarrow \hat{\mathbf{B}}^{2k+1} = (-1)^k \hat{\mathbf{B}} \\ \exp\left[\frac{\pi}{2}(\hat{\mathbf{B}} - \mathbf{e}_{123})\right] &= \exp(\pi\bar{p}\hat{\mathbf{B}}) = 1 + \bar{p} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\pi^{2k}}{(2k)!} + \bar{p}\hat{\mathbf{B}} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\pi^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= 1 + \bar{p} [\cos(\pi) - 1] + \bar{p}\hat{\mathbf{B}} \sin(\pi) = 1 - 2\bar{p} \\ \therefore \exp\left[\frac{\pi}{2}(\mathbf{n} - 1)\mathbf{e}_{123}\right] &= \mathbf{n} \end{aligned}$$

o que mostra que se pode, também, calcular o logaritmo de um vector.

Definições gerais:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{definições gerais} \\ \text{das contracções em } \mathcal{Cl}_3 \end{array}} \rightarrow \begin{cases} u \lrcorner v = -[u \wedge (v\mathbf{e}_{123})]\mathbf{e}_{123} \\ u \llcorner v = -[(u\mathbf{e}_{123}) \wedge v]\mathbf{e}_{123} \end{cases} \leftarrow u, v \in \mathcal{Cl}_3$$

$$\begin{cases} \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3 \\ u \in \mathcal{Cl}_3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{a}u = \mathbf{a} \lrcorner u + \mathbf{a} \wedge u \\ u\mathbf{a} = u \llcorner \mathbf{a} + u \wedge \mathbf{a} \end{cases}$$



2. Álgebra Geométrica do Espaço: Meios Anisotrópicos

Como uma aplicação da álgebra geométrica do espaço, Cl_3 , vai-se agora analisar a propagação de ondas electromagnéticas em meios anisotrópicos.

2.1 Equação de Maxwell-Boffi

Começa-se por mostrar como as quatro equações de Maxwell-Boffi se reduzem a uma única equação em Cl_3 . Consideremos, então, as quatro equações de Maxwell-Boffi (assim designadas por nelas figurarem apenas os campos \mathbf{E} e \mathbf{B} , sem qualquer referência aos campos \mathbf{D} e \mathbf{H}).

$$\text{operador nabla} \rightarrow \boxed{\nabla = \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{intensidade do campo eléctrico} \rightarrow \mathbf{E} \in \mathbb{R}^3 \\ \text{intensidade do campo magnético} \rightarrow \mathbf{B} \in \mathbb{R}^3 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{polarização} \rightarrow \mathbf{P} \in \mathbb{R}^3 \\ \text{magnetização} \rightarrow \mathbf{M} \in \mathbb{R}^3 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P} \\ \mathbf{J}_p = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \\ \mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M} \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{densidade total de carga eléctrica} \rightarrow \rho_t = \rho + \rho_p \in \mathbb{R} \\ \text{densidade total de corrente} \rightarrow \mathbf{J}_t = \mathbf{J} + \mathbf{J}_p + \mathbf{J}_m \in \mathbb{R}^3 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{excitação eléctrica} \rightarrow \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \\ \text{excitação magnética} \rightarrow \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \end{array} \right.$$

Nota: Enquanto que os vectores (\mathbf{E}, \mathbf{B}) são grandezas *intensivas* (descrevem a intensidade do campo electromagnético), os vectores (\mathbf{D}, \mathbf{H}) são grandezas *extensivas* (descrevem a quantidade de excitação de um determinado meio material).

$$\boxed{\text{velocidade da luz no vácuo}} \rightarrow \boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}} \leftarrow \boxed{\text{integração da óptica no electromagnetismo}}$$

Equações de Maxwell-Boffi

conservação do fluxo magnético	→	equação de Maxwell-Faraday → $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ lei de Gauss magnética → $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
conservação da carga-corrente	→	equação de Maxwell-Ampère → $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_t + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ lei de Gauss → $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_t}{\epsilon_0}$

No âmbito da álgebra Cl_3 há que proceder, na escrita anterior, às seguintes substituições:

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla \wedge \mathbf{E} &= (\nabla \times \mathbf{E}) \mathbf{e}_{123} \\ \nabla \lrcorner (\mathbf{B} \mathbf{e}_{123}) &= -\nabla \times \mathbf{B} \end{aligned}}.$$

Obtêm-se, então, as equações de Maxwell-Boffi em Cl_3 (os números do lado esquerdo de cada equação indicam os graus das respectivas equações):

$$\text{impedância do vácuo} \rightarrow \eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \rightarrow \begin{cases} \eta_0 c = \frac{1}{\epsilon_0} \\ \frac{\eta_0}{c} = \mu_0 \end{cases}$$

equações de Maxwell-Boffi em Cl_3	→	$ \begin{aligned} 0 &\mapsto \nabla \cdot \left(\frac{1}{c} \mathbf{E} \right) = \eta_0 \varrho_t \\ 1 &\mapsto \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c} \mathbf{E} \right) + \nabla \lrcorner (\mathbf{B} \mathbf{e}_{123}) = -\mu_0 \mathbf{J}_t \\ 2 &\mapsto \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{B} \mathbf{e}_{123}) + \nabla \wedge \left(\frac{1}{c} \mathbf{E} \right) = 0 \\ 3 &\mapsto \nabla \wedge (\mathbf{B} \mathbf{e}_{123}) = 0 \end{aligned} $
--	---	--

Fazendo, então, uma soma graduada destas quatro equações, obtém-se:

equação de Maxwell-Boffi em Cl_3	→	$ \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \nabla \right) \left(\frac{1}{c} \mathbf{E} + \mathbf{B} \mathbf{e}_{123} \right) = \eta_0 \left(\varrho_t - \frac{1}{c} \mathbf{J}_t \right) $
---------------------------------------	---	--

$$\left\{ \begin{aligned}
 \nabla \mathbf{E} &= \nabla \cdot \mathbf{E} + \nabla \wedge \mathbf{E} \\
 \nabla (\mathbf{B} \mathbf{e}_{123}) &= \nabla \lrcorner (\mathbf{B} \mathbf{e}_{123}) + \nabla \wedge (\mathbf{B} \mathbf{e}_{123}) \\
 \nabla \left(\frac{1}{c} \mathbf{E} + \mathbf{B} \mathbf{e}_{123} \right) &= \frac{1}{c} \nabla \mathbf{E} + \nabla (\mathbf{B} \mathbf{e}_{123})
 \end{aligned} \right.$$

No caso das equações de Maxwell propriamente ditas, em que aparecem não só as intensidades (\mathbf{E}, \mathbf{B}) mas também as excitações (\mathbf{D}, \mathbf{H}) , vem então:

Equações de Maxwell

equação de Maxwell-Faraday	→ $\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{B} \mathbf{e}_{123}) + \nabla \wedge \mathbf{E} = 0$
lei de Gauss magnética	→ $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
equação de Maxwell-Ampère	→ $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \nabla \lrcorner (\mathbf{H} \mathbf{e}_{123}) = -\mathbf{J}$
lei de Gauss	→ $\nabla \cdot \mathbf{D} = \varrho$

Naturalmente que, neste caso, há que suplementar as equações de Maxwell com as relações constitutivas dos meios materiais em estudo.

Consideremos, agora, o caso específico de regiões sem fontes

$$\text{regiões sem fontes do campo} \rightarrow \begin{cases} \varrho = 0 \\ \mathbf{J} = 0 \end{cases}$$

e campos com uma variação da forma

$$\boxed{\text{ondas planas e monocromáticas}} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \Re\{\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)\} \\ \mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] \end{cases}.$$

Nestas condições as equações de Maxwell reduzem-se à forma algébrica simples:

$$\boxed{\begin{cases} \mathbf{k} \wedge \mathbf{E}_0 = \omega(\mathbf{B}_0 \mathbf{e}_{123}) & \mathbf{k} \cdot \mathbf{D}_0 = 0 \\ \mathbf{k} \wedge \mathbf{H}_0 = -\omega(\mathbf{D}_0 \mathbf{e}_{123}) & \mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 = 0 \end{cases}}.$$

Notação: Doravante, por uma questão de *simplificação da escrita* das equações, omite-se o índice zero nas anteriores equações (válidas, apenas, para ondas planas e monocromáticas).

Expressões úteis: Apresentam-se, a seguir, algumas relações úteis envolvendo o operador nabla em Cl_3 :

$$\begin{aligned} \nabla \wedge \mathbf{a} &= (\nabla \times \mathbf{a}) \mathbf{e}_{123} \\ \mathbf{a} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{b}) &= [\mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b})] \mathbf{e}_{123} \\ \mathbf{a} \lrcorner (\nabla \wedge \mathbf{b}) &= -\mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) \\ \nabla \times \mathbf{a} &= -(\nabla \wedge \mathbf{a}) \mathbf{e}_{123} = -\nabla \lrcorner (\mathbf{a} \mathbf{e}_{123}) \\ \nabla \wedge (\mathbf{a} \mathbf{e}_{123}) &= (\nabla \cdot \mathbf{a}) \mathbf{e}_{123} \\ \nabla \mathbf{a} &= \nabla \cdot \mathbf{a} + \nabla \wedge \mathbf{a} = \nabla \cdot \mathbf{a} + (\nabla \times \mathbf{a}) \mathbf{e}_{123} \\ \nabla \lrcorner (\nabla \wedge \mathbf{a}) &= -\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla^2 \mathbf{a} - \nabla (\nabla \cdot \mathbf{a}) \\ \nabla (\mathbf{a} \mathbf{e}_{123}) &= \nabla \lrcorner (\mathbf{a} \mathbf{e}_{123}) + \nabla \wedge (\mathbf{a} \mathbf{e}_{123}) = (\nabla \mathbf{a}) \mathbf{e}_{123} = (\nabla \cdot \mathbf{a}) \mathbf{e}_{123} - \nabla \times \mathbf{a} \\ \nabla (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) &= (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} - \mathbf{a} \lrcorner (\nabla \wedge \mathbf{b}) - \mathbf{b} \lrcorner (\nabla \wedge \mathbf{a}) \\ \nabla \wedge (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) &= [\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})] \mathbf{e}_{123} = \mathbf{b} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{a}) - \mathbf{a} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{b}) \\ \nabla \lrcorner (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) &= -\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\nabla \cdot \mathbf{a}) \mathbf{b} - (\nabla \cdot \mathbf{b}) \mathbf{a} + (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a}. \end{aligned}$$

2.2 Definição geométrica de anisotropia

Introduz-se, agora, o conceito de meio anisotrópico de uma forma geométrica utilizando a álgebra $C\ell_3$. Na literatura é habitual recorrer ao cálculo tensorial (ou diádico) para a descrição da anisotropia. Apenas no fim desta discussão se fará a ponte com a habitual formulação tensorial clássica. De forma a manter a discussão ao nível mais simples, apenas se irá considerar aqui o caso da anisotropia eléctrica. Mais precisamente: consideram-se cristais não-magnéticos sem perdas.

Nota: Pelas relações de Kramers-Kronig – consequência do princípio da causalidade –, as perdas de um meio material estão associadas à sua dispersão temporal. Desprezando as perdas despreza-se, consequentemente, a dispersão. Tal aproximação é razoável – caso não estejamos a trabalhar com um metamaterial com parâmetros negativos. Além disso, não se pode considerar uma banda de frequências de trabalho muito grande, i.e., incompatível com este tipo de aproximação.

Como os meios a estudar são não-magnéticos, tem-se $\mathbf{M} = 0$ e, consequentemente,

$$\text{meio não-magnético} \rightarrow \boxed{\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}}$$

tal como no vácuo. Já a relação entre \mathbf{D} e \mathbf{E} será determinada pela anisotropia, i.e., pelo facto das características do meio dependerem da direcção considerada. Em tudo o que se segue considera-se que o meio em estudo é ilimitado, linear e sem perdas. Quando o meio é isotrópico simples será $\mathbf{D} \parallel \mathbf{E}$; num meio anisotrópico não se verifica esse paralelismo.

Nota: Quando aqui se afirma que o meio é isotrópico simples, pretende-se dizer que não existe acoplamento magnetoeléctrico. Por exemplo: nos meios quirais (ou opticamente activos) a isotropia coexiste com a propagação de ondas características (ou isonormais) de polarização circular (meios com birrefringência circular). Ao restringir-se, aqui, a isotropia ao caso isotrópico simples considera-se que a polarização das ondas características é linear. Assim, de facto, num meio isotrópico simples (que não seja um metamaterial) a isotropia significa que $\mathbf{D} \parallel \mathbf{E}$. Note-se que, num metamaterial DNG (duplamente negativo), \mathbf{D} pode ser diametralmente oposto a \mathbf{E} (quando se desprezam as perdas).

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{fórmula de Euler} \\ \text{em } Cl_3 \end{array}} \rightarrow \exp(\theta \hat{\mathbf{F}}) = \cos \theta + \hat{\mathbf{F}} \sin \theta.$$

O produto geométrico $u = \mathbf{E} \mathbf{D} = \sigma \exp(\theta \hat{\mathbf{F}})$ caracteriza o meio. Só quando o meio for isotrópico simples é que, qualquer que seja a direcção \mathbf{s} ,

$$\text{meio isotrópico} \rightarrow \boxed{\mathbf{E} \mathbf{D} = \mathbf{D} \mathbf{E} \Leftrightarrow \mathbf{E} \parallel \mathbf{D} \Leftrightarrow \mathbf{E} \wedge \mathbf{D} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{E} \mathbf{D} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}.$$

Introduz-se, então, a constante dieléctrica (ou permitividade) relativa ε_s segundo a direcção \mathbf{s} .

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{permitividade (relativa)} \\ \text{segundo a direcção } \mathbf{s} \end{array}} \rightarrow \boxed{\varepsilon_s = \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{s})}.$$

Notação: Usa-se uma fonte de letra sem serifa («arial») para designar uma função linear que aplica vectores em vectores, i.e.,

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{relação constitutiva} \\ \text{do meio anisotrópico} \end{array}} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : \mathbf{E} \mapsto \mathbf{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{s})} \leftarrow \boxed{\begin{array}{l} \text{função} \\ \text{dieléctrica} \end{array}}.$$

Num meio anisotrópico a cada direcção \mathbf{s} do espaço corresponde um escalar $\varepsilon_s = \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{s})$. Um meio isotrópico é o caso particular em que $\varepsilon_s = \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{s})$ é uma contante ε_i que não depende da direcção \mathbf{s} . Nos meios com índice de refracção negativo é $\varepsilon_s < 0$: o ângulo $\theta = \sphericalangle(\mathbf{D}, \mathbf{E})$ é superior a $\pi/2$. O caso limite não-trivial em que $\varepsilon_s = 0$ corresponde a ter-se $\theta = \pi/2$.

Nota: Rigorosamente falando não é possível definir um meio com um índice de refracção $n \in \mathbb{R}$ negativo. É costume dizer que, quando $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{E}$ e $\mathbf{B} = \mu_0 \boldsymbol{\mu} \mathbf{H}$ (num meio isotrópico, portanto) e $\boldsymbol{\varepsilon} < 0$ e $\boldsymbol{\mu} < 0$ (i.e., o meio é um metamaterial DNG ou duplamente negativo), se tem $n = -\sqrt{\boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\mu}} < 0$. Na realidade é $n = \pm \sqrt{\boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\mu}}$, com $\sqrt{\boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\mu}} > 0$. Sabemos, contudo, que se deve escolher a raiz negativa $n = -\sqrt{\boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\mu}}$ por considerações no plano complexo e, apenas por passagem ao limite (em que se faz tender as perdas para zero), afirmar que a solução fisicamente aceitável tem de ser $n < 0$. Com efeito, pelas relações de Kramers-Kronig, as perdas estão associadas à dispersão temporal: um meio DNG tem de ser o caso limite de um meio com $\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{C}$. Basta pensar que os valores médios das energias eléctrica e magnética

$$\begin{cases} \langle W_e \rangle = \frac{1}{4} \varepsilon_0 \varepsilon (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*) \\ \langle W_m \rangle = \frac{1}{4} \mu_0 \mu (\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^*) \end{cases}$$

só fazem sentido se se tiver $\varepsilon > 0$ e $\mu > 0$. Não faz sentido dizer que se tem uma energia electromagnética média negativa. É claro que, com perdas (e, pela causalidade, com dispersão temporal) os valores médios das energias eléctrica e magnética não são dados por estas expressões, sendo então $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$ e $\mu = \mu' + i\mu''$ complexos, embora com a restrição de se ter $\varepsilon'' = \Im\{\varepsilon\} > 0$ e $\mu'' = \Im\{\mu\} > 0$ para que o meio seja passivo – já que consideramos uma variação temporal da forma $\exp(-i\omega t)$. Mas então, ao calcular $n = n_\varepsilon n_\mu$, em que $n_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon' + i\varepsilon''}$ e $n_\mu = \sqrt{\mu' + i\mu''}$, é necessário ter também $n_\varepsilon'' = \Im\{n_\varepsilon\} > 0$ e $n_\mu'' = \Im\{n_\mu\} > 0$. Assim, por exemplo, se se tiver $\varepsilon = \mu = -1$ deve considerar-se $n_\varepsilon = n_\mu = i$ o que conduz, efectivamente, a $n = i^2 = -1$ desde que se considere que $\varepsilon'' > 0$ e $\mu'' > 0$ (mesmo se como valores residuais) e, portanto, para efeitos práticos, $\varepsilon \approx \varepsilon' = -1$ e $\mu \approx \mu' = -1$. De facto,

$$\begin{aligned} n^2 &= (n' + in'')^2 = (n')^2 - (n'')^2 + 2in'n'' \\ &= \varepsilon\mu = (\varepsilon' + i\varepsilon'')(\mu' + i\mu'') = (\varepsilon'\mu' - \varepsilon''\mu'') + i(\varepsilon'\mu'' + \varepsilon''\mu') \end{aligned}$$

o que mostra que deve ser sempre

$$\boxed{2n'n'' = \varepsilon'\mu'' + \varepsilon''\mu'}$$

Assim, a imposição $\varepsilon'' > 0$, $\mu'' > 0$ e $n'' > 0$ (meio passivo) implica que, como $\varepsilon' < 0$ e $\mu' < 0$ (meio DNG), seja $\varepsilon'\mu'' + \varepsilon''\mu' < 0$ e, logo necessariamente, $n' < 0$ (meio com um índice de refacção negativo).

Para clarificar estes conceitos apresenta-se um exemplo. Admitamos que o operador linear $\varepsilon: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tem três valores próprios reais e distintos $\varepsilon_3 > \varepsilon_2 > \varepsilon_1$ (sem perda de generalidade). Façamos, para conveniência de cálculo posterior,

$$\gamma_3^2 + \gamma_1^2 = 1 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \varepsilon_3 = \alpha + 2\beta\gamma_3^2 \\ \varepsilon_2 = \alpha \\ \varepsilon_1 = \alpha - 2\beta\gamma_1^2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \varepsilon_3 - \varepsilon_1 = 2\beta \\ \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = -2\beta\gamma_1^2 \\ \varepsilon_3 - \varepsilon_2 = 2\beta\gamma_3^2 \end{cases}$$

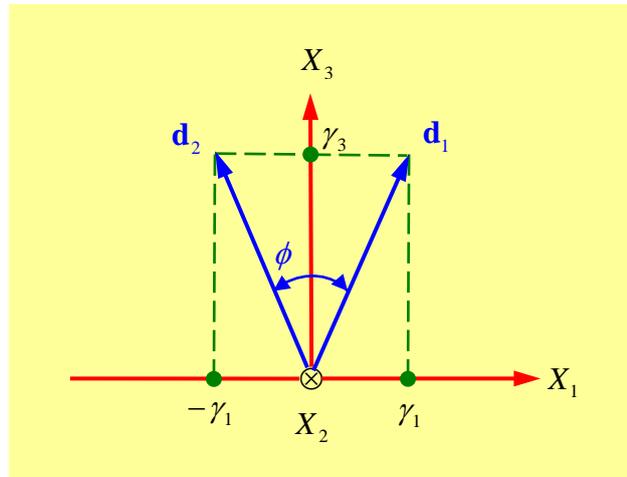
Seja $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ uma base ortonormada de \mathbb{R}^3 constituída pelos vectores próprios do operador considerado, i.e., tais que

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{eixo } X_1 \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{e}_1) = \varepsilon_1 \mathbf{e}_1 \\ \text{eixo } X_2 \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{e}_2) = \varepsilon_2 \mathbf{e}_2 \\ \text{eixo } X_3 \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{e}_3) = \varepsilon_3 \mathbf{e}_3 \end{array} \right.$$

Definindo (ver figura anexa)

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{d}_1 = \gamma_1 \mathbf{e}_1 + \gamma_3 \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{d}_2 = -\gamma_1 \mathbf{e}_1 + \gamma_3 \mathbf{e}_3 \end{array} \right.$$

em que $\gamma_1 = \sin(\phi/2)$ e $\gamma_3 = \cos(\phi/2)$, é possível escrever o operador linear em termos destes dois vectores unitários como



$$\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3 \mapsto \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{a}) = \alpha \mathbf{a} + \beta [(\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}_1) \mathbf{d}_2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}_2) \mathbf{d}_1] = \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3.$$

Nomenclatura: Um operador linear $\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, com três valores próprios reais e positivos distintos, pode ser escrito em termos de dois vectores unitários \mathbf{d}_1 e \mathbf{d}_2 não paralelos. Por essa razão diz-se que se trata de um *operador biaxial*.

Demonstração: De acordo com a figura, tem-se

$$\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{d}_2 = \cos \phi = \cos^2 \frac{\phi}{2} - \sin^2 \frac{\phi}{2} = \gamma_3^2 - \gamma_1^2 = \frac{\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3}{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}.$$

Assim, vem

$$\frac{1}{2}(1 + \cos \phi) = \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_2}{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}, \quad \frac{1}{2}(1 - \cos \phi) = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}.$$

Como se admite que $\varepsilon_3 > \varepsilon_2 > \varepsilon_1$, é $\varepsilon_3 - \varepsilon_2 > 0$, $\varepsilon_2 - \varepsilon_1 > 0$ e $\varepsilon_3 - \varepsilon_1 > 0$. Além disso, como

$$\cos \frac{\phi}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \phi}{2}}, \quad \sin \frac{\phi}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \phi}{2}}$$

infere-se ainda que

$$\gamma_3 = \sqrt{\frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_2}{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}}, \quad \gamma_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}}.$$

Porém,

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3 \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{a}) = \varepsilon_1 a_1 \mathbf{e}_1 + \varepsilon_2 a_2 \mathbf{e}_2 + \varepsilon_3 a_3 \mathbf{e}_3$$

$$\therefore \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{a}) = \varepsilon_2 \mathbf{a} + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) a_1 \mathbf{e}_1 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_2) a_3 \mathbf{e}_3.$$

Há agora que escrever $a_1 \mathbf{e}_1$ e $a_3 \mathbf{e}_3$ exclusivamente em termos de \mathbf{a} , \mathbf{d}_1 e \mathbf{d}_2 . Assim, tem-se

$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_2}{2\gamma_1} \\ \mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2}{2\gamma_3} \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} a_1 = \frac{(\mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_2) \cdot \mathbf{a}}{2\gamma_1} \\ a_3 = \frac{(\mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2) \cdot \mathbf{a}}{2\gamma_3} \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} a_1 \mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_2)}{4\gamma_1^2} (\mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_2) \\ a_3 \mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2)}{4\gamma_3^2} (\mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2) \end{array} \right|$$

pelo que

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{a}) = \alpha \mathbf{a} + \frac{\beta}{2} \{ [\mathbf{a} \cdot (\mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2)] (\mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2) - [\mathbf{a} \cdot (\mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_2)] (\mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_2) \}$$

$$\therefore \begin{cases} \alpha = \varepsilon_2 \\ \beta = \frac{1}{2} (\varepsilon_3 - \varepsilon_1) \end{cases} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{a}) = \alpha \mathbf{a} + \beta [(\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}_1) \mathbf{d}_2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}_2) \mathbf{d}_1]}.$$

Operador uniaxial: Um caso particular corresponde a ter-se $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$. Façamos, neste caso particular, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_\perp$ e $\varepsilon_3 = \varepsilon_\parallel$. Mas então

$$\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{d}_2 = \cos \phi = \frac{\varepsilon_\parallel - \varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel - \varepsilon_\perp} = 1 \Rightarrow \phi = 0 \Rightarrow \mathbf{d}_1 = \mathbf{d}_2 = \mathbf{c}$$

$$\therefore \boxed{\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{a}) = \varepsilon_\perp \mathbf{a} + (\varepsilon_\parallel - \varepsilon_\perp) (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{c}}.$$

Diz-se, então, que se trata de um *operador uniaxial* uma vez que os dois eixos se reduzem a um único eixo \mathbf{c} . Note-se que este caso poderia deduzir-se simplesmente da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{a}) = \varepsilon_\perp (\mathbf{a} - a_3 \mathbf{c}) + \varepsilon_\parallel a_3 \mathbf{c} = \varepsilon_\perp \mathbf{a} + (\varepsilon_\parallel - \varepsilon_\perp) a_3 \mathbf{c} = \varepsilon_\perp \mathbf{a} + (\varepsilon_\parallel - \varepsilon_\perp) (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{c}.$$

Operador isotrópico: Um caso particular do caso uniaxial corresponde a ter-se $\varepsilon_\parallel = \varepsilon_\perp = \varepsilon_i$.

Logo $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{a}) = \varepsilon_i \mathbf{a}$. Trata-se, então, de um operador *isotrópico* uma vez que todas as direcções do espaço \mathbb{R}^3 são equivalentes.

Em síntese, podemos escrever:

<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> relação constitutiva $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{E})$ </div>	\rightarrow	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding-right: 10px;">meio biaxial</td> <td style="padding-right: 10px;">\mapsto</td> <td>$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{E}) = \alpha \mathbf{E} + \beta [(\mathbf{E} \cdot \mathbf{d}_1) \mathbf{d}_2 + (\mathbf{E} \cdot \mathbf{d}_2) \mathbf{d}_1]$</td> </tr> <tr> <td>meio uniaxial</td> <td>\mapsto</td> <td>$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{E}) = \varepsilon_{\perp} \mathbf{E} + (\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{c}$</td> </tr> <tr> <td>meio isotrópico</td> <td>\mapsto</td> <td>$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{E}) = \varepsilon_i \mathbf{E}$</td> </tr> </table>	meio biaxial	\mapsto	$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{E}) = \alpha \mathbf{E} + \beta [(\mathbf{E} \cdot \mathbf{d}_1) \mathbf{d}_2 + (\mathbf{E} \cdot \mathbf{d}_2) \mathbf{d}_1]$	meio uniaxial	\mapsto	$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{E}) = \varepsilon_{\perp} \mathbf{E} + (\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{c}$	meio isotrópico	\mapsto	$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{E}) = \varepsilon_i \mathbf{E}$
meio biaxial	\mapsto	$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{E}) = \alpha \mathbf{E} + \beta [(\mathbf{E} \cdot \mathbf{d}_1) \mathbf{d}_2 + (\mathbf{E} \cdot \mathbf{d}_2) \mathbf{d}_1]$									
meio uniaxial	\mapsto	$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{E}) = \varepsilon_{\perp} \mathbf{E} + (\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{c}$									
meio isotrópico	\mapsto	$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{E}) = \varepsilon_i \mathbf{E}$									

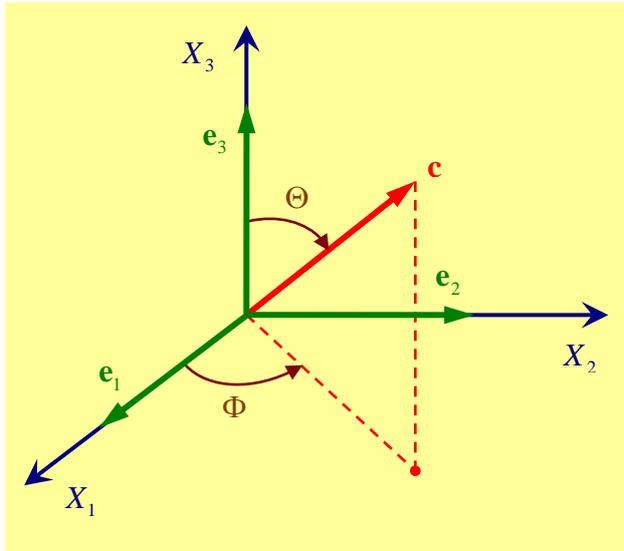
Os vectores unitários $(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2)$ caracterizam o meio biaxial; o vector unitário \mathbf{c} caracteriza o meio uniaxial. Num meio isotrópico não é possível discriminar qualquer direcção preferencial.

<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> caso biaxial $\varepsilon_3 > \varepsilon_2 > \varepsilon_1$ </div>	\rightarrow	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding-right: 10px;">$\alpha = \varepsilon_2$</td> <td style="padding-right: 10px;">\left</td> <td style="padding-right: 10px;">$\mathbf{d}_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}} \mathbf{e}_1 + \sqrt{\frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_2}{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}} \mathbf{e}_3$</td> </tr> <tr> <td>$\beta = \frac{1}{2}(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)$</td> <td>$\left$</td> <td>$\mathbf{d}_2 = -\sqrt{\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}} \mathbf{e}_1 + \sqrt{\frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_2}{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}} \mathbf{e}_3$</td> </tr> </table>	$\alpha = \varepsilon_2$	$\left $	$\mathbf{d}_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}} \mathbf{e}_1 + \sqrt{\frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_2}{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}} \mathbf{e}_3$	$\beta = \frac{1}{2}(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)$	$\left $	$\mathbf{d}_2 = -\sqrt{\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}} \mathbf{e}_1 + \sqrt{\frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_2}{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}} \mathbf{e}_3$
$\alpha = \varepsilon_2$	$\left $	$\mathbf{d}_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}} \mathbf{e}_1 + \sqrt{\frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_2}{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}} \mathbf{e}_3$						
$\beta = \frac{1}{2}(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)$	$\left $	$\mathbf{d}_2 = -\sqrt{\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}} \mathbf{e}_1 + \sqrt{\frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_2}{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}} \mathbf{e}_3$						

A anterior caracterização de $(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2)$ refere-se à base $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ constituída pelos eixos dieléctricos principais, i.e., ao referencial constituído pelos vectores próprios do operador biaxial. No caso uniaxial o valor próprio (não degenerado) ε_{\parallel} corresponde ao vector próprio \mathbf{c} (eixo do cristal) enquanto que o valor próprio (duplamente degenerado) ε_{\perp} corresponde aos outros dois vectores próprios que definem o plano ortogonal ao eixo \mathbf{c} do cristal.

Esta nova forma de descrever a anisotropia através da álgebra geométrica permite tratar, de forma mais directa, a física e a geometria envolvidas. Porém, facilmente se recupera, a partir desta nova metodologia, a terminologia tensorial clássica. Com efeito, uma vez definida a função dieléctrica $\boldsymbol{\varepsilon}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, é possível recuperar o correspondente tensor dieléctrico desde que se adopte uma determinada base $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ do espaço \mathbb{R}^3 (que não tem de ser, necessariamente, constituída pelos eixos dieléctricos principais).

<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> como recuperar o tensor dieléctrico a partir da função dieléctrica </div>	\rightarrow	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> $\varepsilon_{jk} = \mathbf{e}_j \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{e}_k)$ </div>	\leftarrow	$j, k \in \{1, 2, 3\}$
--	---------------	--	--------------	------------------------



Veamos um exemplo para ilustrar este processo. Consideremos um cristal uniaxial cujo eixo óptico seja dado, num determinado referencial, por

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{a}) = \varepsilon_{\perp} \mathbf{a} + (\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{c}$$

com

$$\begin{cases} \mathbf{c} = c_1 \mathbf{e}_1 + c_2 \mathbf{e}_2 + c_3 \mathbf{e}_3 \\ \begin{cases} c_1 = \sin \Theta \cos \Phi \\ c_2 = \sin \Theta \sin \Phi \\ c_3 = \cos \Theta \end{cases} \end{cases}$$

Neste exemplo, vem então:

$$\begin{array}{l} \boxed{\text{tensor}} \\ \boxed{\text{dielétrico}} \end{array} \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \varepsilon_{11} = \varepsilon_{\perp} + (\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}) \sin^2 \Theta \cos^2 \Phi \\ \varepsilon_{22} = \varepsilon_{\perp} + (\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}) \sin^2 \Theta \sin^2 \Phi \\ \varepsilon_{33} = \varepsilon_{\perp} \sin^2 \Theta + \varepsilon_{\parallel} \cos^2 \Theta \\ \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = (\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}) \sin^2 \Theta \sin \Phi \cos \Phi \\ \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = (\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}) \sin \Theta \cos \Theta \cos \Phi \\ \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = (\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}) \sin \Theta \cos \Theta \sin \Phi \end{cases}$$

Por outro lado, se se considerar que $\mathbf{c} = \mathbf{e}_3$ e $\theta = \angle(\mathbf{D}, \mathbf{E})$, vem:

$$\begin{array}{l} \mathbf{s} = s_1 \mathbf{e}_1 + s_2 \mathbf{e}_2 + s_3 \mathbf{e}_3 \\ \begin{cases} s_1 = \sin \Theta \cos \Phi \\ s_2 = \sin \Theta \sin \Phi \\ s_3 = \cos \Theta \end{cases} \end{array} \rightarrow \boxed{\kappa = \frac{\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\perp}}} \rightarrow \begin{cases} \cos \theta = \frac{\sin^2 \Theta + \kappa \cos^2 \Theta}{\sqrt{\sin^2 \Theta + \kappa^2 \cos^2 \Theta}} \\ \varepsilon_s = \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{s}) = \varepsilon_{\perp} [1 + (\kappa - 1) \cos^2 \Theta] \end{cases}$$

$$\therefore \Theta_{\max} = \tan^{-1}(\sqrt{\kappa}) \rightarrow \boxed{\theta_{\max} = \cos^{-1}\left(\frac{2\sqrt{\kappa}}{1+\kappa}\right)}$$

2.3 Propagação de ondas electromagnéticas num meio anisotrópico

Para ilustrar de que forma é que a álgebra Cl_3 permite analisar a propagação de ondas electromagnéticas num meio anisotrópico, apresenta-se agora o exemplo concreto dos cristais não-magnéticos uniaxiais. Neste caso, como se viu atrás, tem-se

$$\text{meio uniaxial} \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{E}) = \varepsilon_{\perp} \mathbf{E} + (\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{c}.$$

Notação: Num cristal uniaxial é costume fazer a identificação $\varepsilon_{\perp} = n_o^2$ e $\varepsilon_{\parallel} = n_e^2$. O cristal uniaxial diz-se positivo quando $\varepsilon_{\parallel} > \varepsilon_{\perp}$ e negativo quando $\varepsilon_{\parallel} < \varepsilon_{\perp}$.

Supondo que (k_0 é a constante de propagação no vácuo, $\hat{\mathbf{k}}$ o vector unitário que caracteriza o vector \mathbf{k} da constante de propagação, n o índice de refração efectivo da onda e \mathbf{n} o vector índice de refração efectivo)

$$k_0 = \frac{\omega}{c} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{k} = k_0 \mathbf{n} \\ \mathbf{n} = n \hat{\mathbf{k}} \end{cases} \rightarrow \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] = \exp[i k_0 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - c t)]$$

$$\therefore \mathbf{E}(r, t) = \Re \{ \mathbf{E}_0 \exp[i k_0 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - c t)] \}$$

as equações de Maxwell (para regiões sem fontes) permitem escrever, tal como se viu atrás (e eliminando os índices zero para simplificar a escrita),

$$\begin{cases} \mathbf{n} \wedge \mathbf{E} = c \mathbf{B} \mathbf{e}_{123} \\ \mathbf{n} \wedge \mathbf{H} = -c \mathbf{D} \mathbf{e}_{123} \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = 0 \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{H} = 0 \end{cases}.$$

A equação $\mathbf{n} \cdot \mathbf{H} = 0$ mostra, desde já, que todas as ondas são TM.

Definição: A relação constitutiva $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{E})$ é equivalente a escrever

$$\text{relação constitutiva} \rightarrow \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \boldsymbol{\eta}(\mathbf{D})$$

onde se introduziu a função inversa (sempre que esta existir)

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\varepsilon}^{-1}.$$

Logo, como $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$, vem sucessivamente

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{n} \lrcorner (\mathbf{n} \wedge \mathbf{E}) = n^2 \mathbf{E} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{n} = n^2 \mathbf{E}_\perp \\ \mathbf{n} \lrcorner (\mathbf{B} \mathbf{e}_{123}) = (\mathbf{n} \wedge \mathbf{B}) \mathbf{e}_{123} = \mu_0 (\mathbf{n} \wedge \mathbf{H}) \mathbf{e}_{123} = \mu_0 c \mathbf{D} = \frac{1}{c} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{E}) \end{array} \right.$$

donde se infere que

$$\begin{aligned} n^2 \mathbf{E}_\perp &= \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{E}) \Rightarrow \mathbf{E} = n^2 \boldsymbol{\eta}(\mathbf{E}_\perp) \\ \therefore \mathbf{E}_\parallel &= \mathbf{E} - \mathbf{E}_\perp \Rightarrow \boxed{\mathbf{E}_\parallel = n^2 \boldsymbol{\eta}(\mathbf{E}_\perp) - \mathbf{E}_\perp}. \end{aligned}$$

Esta última equação mostra como \mathbf{E}_\parallel se obtém exclusivamente em termos de \mathbf{E}_\perp desde que n seja conhecido.

Nomenclatura: Definiu-se a componente paralela do campo eléctrico como sendo a respectiva componente segundo $\hat{\mathbf{k}}$, i.e., tal que $\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E}_\perp = 0$.

$$E_\parallel = \frac{1}{n} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \Rightarrow \mathbf{E}_\parallel = \frac{1}{n^2} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{n} \Rightarrow n^2 \mathbf{E}_\perp = n^2 (\mathbf{E} - \mathbf{E}_\parallel) = n^2 \mathbf{E} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{n}$$

A equação das ondas

$$\text{equação das ondas} \rightarrow \boxed{\hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{E}_\parallel = 0}$$

resulta então, de forma imediata, da própria definição de \mathbf{E}_\parallel . Vem então

$$\hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{E}_\parallel = n^2 [\hat{\mathbf{k}} \wedge \boldsymbol{\eta}(\mathbf{E}_\perp)] - \hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{E}_\perp = 0.$$

Notando que

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_0 = \eta_\perp = \frac{1}{n_o^2} \\ \beta_0 = \eta_\parallel - \eta_\perp = \frac{1}{n_e^2} - \frac{1}{n_o^2} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\eta}(\mathbf{E}_\perp) = \alpha_0 \mathbf{E}_\perp + \beta_0 (\mathbf{c} \cdot \mathbf{E}_\perp) \mathbf{c} \\ \hat{\mathbf{k}} \wedge \boldsymbol{\eta}(\mathbf{E}_\perp) = \alpha_0 (\hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{E}_\perp) + \beta_0 (\mathbf{c} \cdot \mathbf{E}_\perp) (\hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{c}) \end{array} \right.$$

no caso dum cristal uniaxial, obtém-se finalmente

$$\boxed{\text{equação das ondas num cristal uniaxial}} \rightarrow \boxed{(\alpha_0 n^2 - 1) (\hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{E}_\perp) + \beta_0 n^2 (\mathbf{c} \cdot \mathbf{E}_\perp) (\hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{c}) = 0}.$$

Por contracção com $\hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{c}$, obtém-se então as duas ondas características (ou isonormais)

$$\underbrace{\left[(1 - \alpha_0 n^2) + \beta_0 n^2 (\hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{c})^2 \right]}_{\text{onda extraordinária}} \underbrace{(\mathbf{c} \cdot \mathbf{E}_\perp)}_{\text{onda ordinária}} = 0.$$

Nota: Em geral é

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \wedge \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}).$$

Assim, vem efectivamente

$$(\hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{c}) \cdot (\hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{E}_\perp) = (\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E}_\perp)(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c} \cdot \mathbf{E}_\perp = -\mathbf{c} \cdot \mathbf{E}_\perp.$$

Tem-se, ainda, o caso particular

$$(\hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{c}) \cdot (\hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{c}) = (\hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{c})^2.$$

A onda ordinária resulta da solução $\mathbf{c} \cdot \mathbf{E}_\perp = 0$. Com efeito, substituindo esta solução na equação das ondas, obtém-se

$$(\alpha_0 n^2 - 1)(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E}_\perp) \neq -\alpha_0 n^2 \neq 0$$

$$\therefore \text{onda ordinária} \rightarrow \boxed{n^2 = \frac{1}{\alpha_0} = n_o^2}.$$

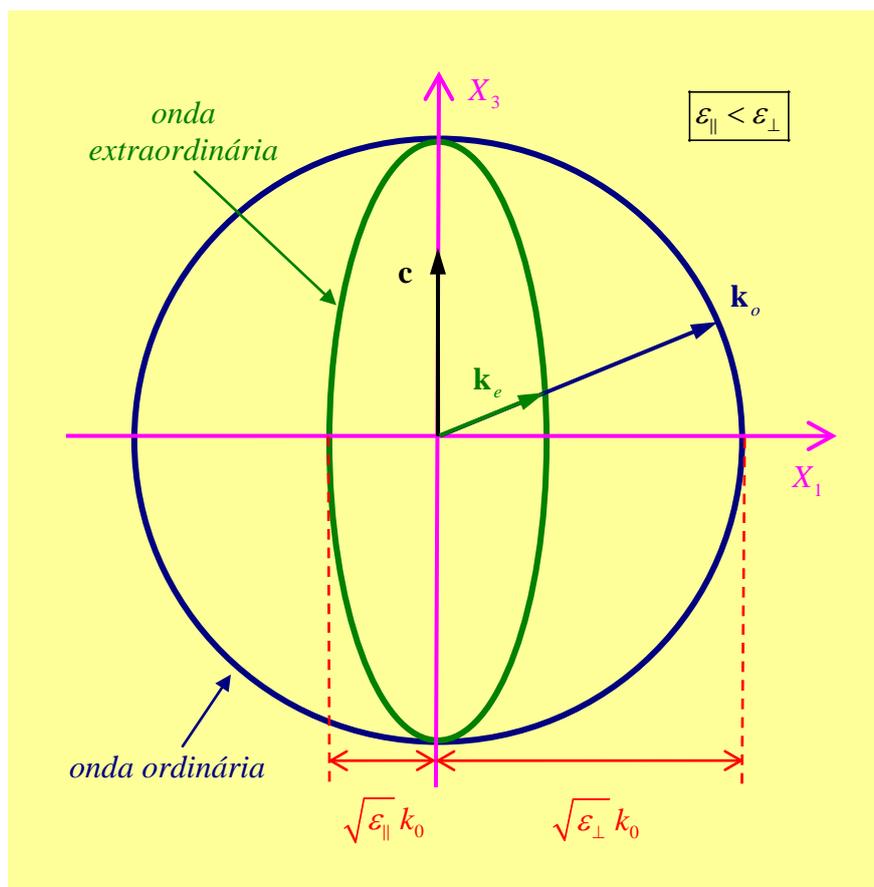
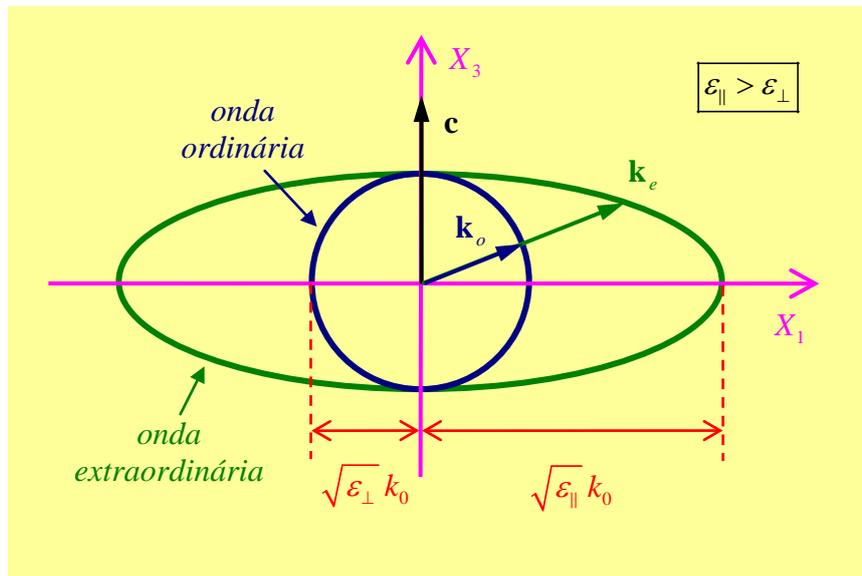
A onda extraordinária corresponde, por outro lado, a ter-se

$$\frac{1}{n^2} = \alpha_0 - \beta_0 (\hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{c})^2$$

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{c} = \cos \theta \\ (\hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{c})^2 = -\sin^2 \theta \end{cases} \rightarrow \frac{1}{n^2} = \alpha_0 + \beta_0 \sin^2 \theta \Rightarrow \boxed{\frac{1}{n^2} = \frac{\cos^2 \theta}{n_o^2} + \frac{\sin^2 \theta}{n_e^2}}$$

$$\therefore \text{onda extraordinária} \rightarrow \boxed{\frac{1}{n^2} = \frac{(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{c})^2}{n_o^2} - \frac{(\hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{c})^2}{n_e^2}}.$$

Comentário: De $\mathbf{E}_\perp = \mathbf{E} - \mathbf{E}_\parallel = \mathbf{E} - (\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E})\hat{\mathbf{k}}$, obtém-se $\mathbf{c} \cdot \mathbf{E}_\perp = \mathbf{c} \cdot \mathbf{E} - (\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E})(\mathbf{c} \cdot \hat{\mathbf{k}})$. No caso da propagação ao longo do eixo óptico (i.e., quando $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{c}$), vem então $\mathbf{c} \cdot \mathbf{E}_\perp = \mathbf{c} \cdot \mathbf{E} - \mathbf{c} \cdot \mathbf{E} = 0$ que corresponde à solução geral da onda ordinária. Inere-se portanto que, no caso da onda extraordinária, a respectiva solução coincide com a da onda ordinária para $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{c}$. Ou seja: num cristal uniaxial existe um eixo óptico \mathbf{c} tal que, para propagação paralela a esse eixo, as duas soluções (onda ordinária e onda extraordinária) têm a mesma constante de propagação $\mathbf{k} = n_o k_0 \hat{\mathbf{k}}$. Esta é também a conclusão que se tira da equação geral da onda extraordinária.



2.4 Álgebra geométrica e álgebra linear

A álgebra geométrica simplifica e, ao mesmo tempo, ilumina a álgebra linear. Em física aplicada e engenharia é costume relacionar a álgebra linear com a álgebra tensorial. Uma visão menos moderna da álgebra linear costuma ligá-la a uma imprescindível «ginástica de índices» para a manipulação de tensores. Sobre esta ginástica, veja-se por exemplo:

 Charles W. Misner, Kip S. Thorne, and John Archibald Wheeler, *Gravitation*. San Francisco: Freeman, 1973 (Box 3.3: p. 85).

Porém, essa é uma visão ultrapassada da álgebra linear (registre-se, a propósito, que o *Gravitation* foi um livro pioneiro ao fazer a apologia da álgebra exterior de Grassmann e das formas diferenciais no estudo da teoria da relatividade geral). Os matemáticos tentam combater, por vezes sem grande sucesso, essa visão ultrapassada. A título de exemplo cita-se, aqui, uma dessas tentativas dirigidas a alunos do primeiro ciclo – tratar os operadores lineares em espaços lineares (ou vectoriais) sem recorrer (ou recorrendo, apenas, o mínimo indispensável) à linguagem matricial:

 Sheldon Axler, *Linear Algebra Done Right*. New York: Springer-Verlag, 2nd ed., 1997.

Na álgebra geométrica é possível fazer isso da forma mais natural possível – como se explica em:

 Chris Doran and Anthony Lasenby, *Geometric Algebra for Physicists*. Cambridge: Cambridge University Press, 2005 (Sec.4.4: pp. 103-115)

 David Hestenes and Garret Sobczyk, *Clifford Algebra to Geometric Calculus: A Unified Language for Mathematics and Physics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1984 (Chapter 3: pp. 63-136)

Para dar um pequeno vislumbre das potencialidades que a álgebra geométrica traz à álgebra linear vamos restringir a nossa análise ao caso $C\ell_3$ para ilustrar a nossa apresentação. Consideram-se, apenas, exemplos tirados da anisotropia dos cristais não-magnéticos. Tal como se disse anteriormente, em vez de tratar esta anisotropia a partir do tensor dielétrico

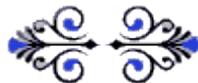
usa-se a função dielétrica. Para clarificar esta distinção consideremos, para fixar ideias, um cristal uniaxial. Tem-se, com $\mathbf{a}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{c}^2 = 1$ (\mathbf{c} , recorda-se aqui, é o eixo óptico do cristal),

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{tensor dielétrico} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{\perp} \mathbf{I} + (\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}) \mathbf{c} \otimes \mathbf{c} \\ \text{função dielétrica} \quad \rightarrow \quad \varepsilon(\mathbf{a}) = \varepsilon_{\perp} \mathbf{a} + (\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}) (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{c} \end{array} \right.$$

Notação: Para designar o tensor dielétrico usa-se uma fonte em negrito ($\boldsymbol{\varepsilon}$) e, para designar a função dielétrica, uma fonte não-serifada (ε).

Note-se que, ao escrever o tensor dielétrico, já se usou uma notação diádica independente de qualquer sistema de coordenadas de forma a tornar a comparação entre os dois formalismos mais equilibrada. Este tipo de tratamento diádico dos tensores (cartesianos) pode ser consultado, e.g., em:

- 📖 Hollis C. Chen, *Theory of Electromagnetic Waves: A Coordinate-Free Approach*. New York: McGraw-Hill, 1985.
- 📖 Ismo V. Lindell, *Methods for Electromagnetic Field Analysis*. New York: IEEE Press, 1992.



Porém, em que ponto é que existe uma real divergência no processo de tratamento? A resposta é a seguinte: na álgebra geométrica generaliza-se o conceito de função (ou operador) linear $\varepsilon : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\text{operador linear} \quad \rightarrow \quad \boxed{\varepsilon(\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}) = \lambda \varepsilon(\mathbf{a}) + \mu \varepsilon(\mathbf{b})}$$

a toda a álgebra ($C\ell_3$, neste caso) através da sua aplicação a qualquer lâmina (e, por extensão, a qualquer multivector) usando a seguinte definição:

$$\boxed{\text{generalização da função dielétrica}} \quad \rightarrow \quad \varepsilon(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \varepsilon(\mathbf{a}) \wedge \varepsilon(\mathbf{b}) \in \bigwedge^2 \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3.$$

De forma a ilustrar este conceito, determinemos – no caso uniaxial – o respectivo resultado desta generalização. Vem sucessivamente (com $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{R}^3$)

$$\left| \begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2) &= [\varepsilon_{\perp} \mathbf{a}_1 + (\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}_1) \mathbf{c}] \wedge [\varepsilon_{\perp} \mathbf{a}_2 + (\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}_2) \mathbf{c}] \\ &= \varepsilon_{\perp}^2 (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2) + \varepsilon_{\perp} (\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}_2)(\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{c}) - \varepsilon_{\perp} (\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}_1)(\mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{c}) \\ &= \varepsilon_{\perp}^2 (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2) + \varepsilon_{\perp} (\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}) \{[(\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2) \llcorner \mathbf{c}] \wedge \mathbf{c}\} \end{aligned} \right.$$

onde se usou a propriedade

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2) \llcorner \mathbf{c} &= -\mathbf{c} \lrcorner (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2) = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}_2) \mathbf{a}_1 - (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}_1) \mathbf{a}_2 \\ \therefore [(\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2) \llcorner \mathbf{c}] \wedge \mathbf{c} &= (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}_2)(\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{c}) - (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}_1)(\mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{c}). \end{aligned}$$

Podemos, agora, calcular

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{a}_3) = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{a}_1) \wedge \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{a}_2) \wedge \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{a}_3).$$

Atendendo a que

$$\left| \begin{aligned} (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{a}_3) \llcorner \mathbf{c} &= \mathbf{c} \lrcorner (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{a}_3) \\ &= (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}_1)(\mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{a}_3) - (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}_2)(\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_3) + (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}_3)(\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2) \end{aligned} \right.$$

$$\therefore [(\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{a}_3) \llcorner \mathbf{c}] \wedge \mathbf{c} = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}_1)(\mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{a}_3 \wedge \mathbf{c}) - (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}_2)(\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_3 \wedge \mathbf{c}) + (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}_3)(\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{c})$$

obtém-se

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{a}_3) = \varepsilon_{\perp}^3 (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{a}_3) + \varepsilon_{\perp}^2 (\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}) \{[(\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{a}_3) \llcorner \mathbf{c}] \wedge \mathbf{c}\}.$$

Assim, no caso particular em que $\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{a}_2 = \mathbf{e}_2$ e $\mathbf{a}_3 = \mathbf{e}_3$, infere-se que

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{e}_{123}) = \varepsilon_{\perp}^3 \mathbf{e}_{123} + \varepsilon_{\perp}^2 (\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}) [(\mathbf{e}_{123} \llcorner \mathbf{c}) \wedge \mathbf{c}].$$

Porém, com

$$(\mathbf{e}_{123} \llcorner \mathbf{c}) \wedge \mathbf{c} = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{e}_{123} = \mathbf{e}_{123}$$

resulta, finalmente, que

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{e}_{123}) = \varepsilon_{\perp}^3 \mathbf{e}_{123} + \varepsilon_{\perp}^2 (\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}) \mathbf{e}_{123} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{e}_{123}) = \varepsilon_{\perp}^2 \varepsilon_{\parallel} \mathbf{e}_{123}}.$$

Qual é a utilidade prática desta última expressão? Vejamos.

Em álgebra geométrica define-se determinante de um operador linear de uma forma muito simples e completamente independente da linguagem matricial. Consideremos, novamente, o caso específico de $\mathcal{C}\ell_3$.

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{determinante de um operador} \\ \text{linear em } \mathcal{C}\ell_3 \end{array}} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{e}_{123}) = \det(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{e}_{123}}$$

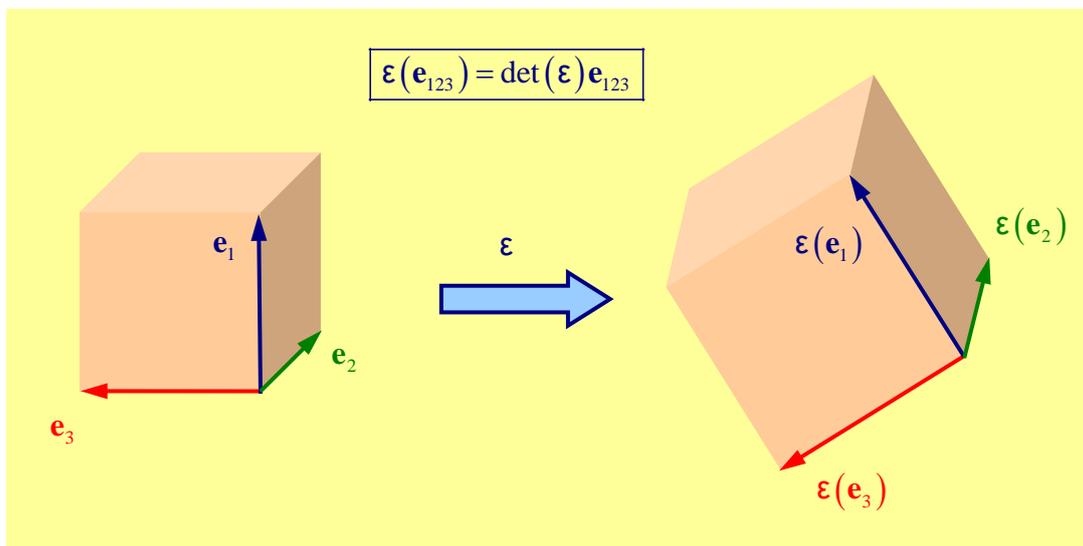
A figura anexa ilustra graficamente esta definição. É claro que esta definição se generaliza para qualquer dimensão (finita): basta substituir \mathbf{e}_{123} pelo respectivo pseudoescalar unitário. Mas então, decorre desta definição e do resultado anterior que

$$\boxed{\det(\boldsymbol{\varepsilon}) = \varepsilon_{\perp}^2 \varepsilon_{\parallel}}.$$

Este resultado talvez não seja muito impressionante, uma vez que – no caso biaxial – se tem

$$\left| \begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{e}_1) &= \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{e}_1) \wedge \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{e}_2) \wedge \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{e}_3) \\ &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \mathbf{e}_{123} \end{aligned} \right. \Rightarrow \boxed{\det(\boldsymbol{\varepsilon}) = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3}$$

onde ε_1 , ε_2 e ε_3 são os três valores próprios da função dieléctrica segundo os eixos dieléctricos principais (os vectores próprios) \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 e \mathbf{e}_3 (respectivamente). Logo, no caso uniaxial, se for $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_{\perp}$ e $\varepsilon_3 = \varepsilon_{\parallel}$, obtém-se $\det(\boldsymbol{\varepsilon}) = \varepsilon_{\perp}^2 \varepsilon_{\parallel}$.



Talvez o homomorfismo seguinte seja mais impressionante: a demonstração de que o determinante do produto de dois operadores é o produto dos respectivos determinantes.

$$\det(\boldsymbol{\varepsilon}_a \boldsymbol{\varepsilon}_b) \mathbf{e}_{123} = \boldsymbol{\varepsilon}_a \boldsymbol{\varepsilon}_b (\mathbf{e}_{123}) = \det(\boldsymbol{\varepsilon}_b) \boldsymbol{\varepsilon}_a (\mathbf{e}_{123}) = \det(\boldsymbol{\varepsilon}_a) \det(\boldsymbol{\varepsilon}_b) \mathbf{e}_{123}$$

$$\therefore \boxed{\det(\boldsymbol{\varepsilon}_a \boldsymbol{\varepsilon}_b) = \det(\boldsymbol{\varepsilon}_a) \det(\boldsymbol{\varepsilon}_b)}$$



Uma outra definição importante é a de função adjunta. Dada uma função $\boldsymbol{\varepsilon}$ define-se a sua adjunta $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ como sendo o operador tal que, quaisquer que sejam $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$,

$$\boxed{\mathbf{a} \cdot \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{b}) = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}} .$$

Naturalmente que, também, é

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{a}) \wedge \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{b}) .$$

Então, usando o resultado

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \lrcorner (\mathbf{c} \wedge \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d})$$

podemos deduzir que

$$\left| \begin{aligned} (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2) \lrcorner \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{b}_1 \wedge \mathbf{b}_2) &= (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2) \lrcorner [\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{b}_1) \wedge \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{b}_2)] \\ &= [\mathbf{a}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{b}_2)] [\mathbf{a}_2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{b}_1)] - [\mathbf{a}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{b}_1)] [\mathbf{a}_2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{b}_2)] \\ &= [\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{a}_1) \cdot \mathbf{b}_2] [\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{b}_1] - [\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{a}_1) \cdot \mathbf{b}_1] [\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{b}_2] \\ &= \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2) \lrcorner (\mathbf{b}_1 \wedge \mathbf{b}_2) \end{aligned} \right.$$

ou ainda

$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{B}_1 = \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \in \wedge^2 \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{B}_2 = \mathbf{b}_1 \wedge \mathbf{b}_2 \in \wedge^2 \mathbb{R}^3 \end{array} \right. \rightarrow \boxed{\mathbf{B}_1 \lrcorner \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{B}_2) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{B}_1) \lrcorner \mathbf{B}_2} .$$

Em geral pode demonstrar-se que

$$u, v \in \mathcal{C}\ell_3 \rightarrow \langle u \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(v) \rangle_0 = \langle \boldsymbol{\varepsilon}(u) v \rangle_0 .$$

Um outro resultado importante é o seguinte

$$\left| \begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2) \lrcorner \mathbf{a} &= [\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{a}_1) \wedge \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{a}_2)] \lrcorner \mathbf{a} \\ &= [\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{a}] \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{a}_1) - [\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{a}_1) \cdot \mathbf{a}] \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{a}_2) \\ &= [\mathbf{a}_2 \cdot \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{a})] \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{a}_1) - [\mathbf{a}_1 \cdot \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{a})] \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{a}_2) \\ &= \boldsymbol{\varepsilon} \{ [\mathbf{a}_2 \cdot \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{a})] \mathbf{a}_1 - [\mathbf{a}_1 \cdot \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{a})] \mathbf{a}_2 \} \\ &= \boldsymbol{\varepsilon} [(\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2) \lrcorner \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{a})] \end{aligned} \right.$$

ou seja

$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{B} = \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \in \wedge^2 \mathbb{R}^3 \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{B}) \lrcorner \mathbf{a} = \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{B} \lrcorner \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{a})]} .$$

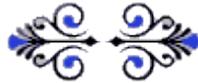
Quando uma função coincide com a sua adjunta diz-se que é auto-adjunta (ou simétrica). É o caso da função uniaxial que se tem vindo a considerar. De facto, tem-se

$$\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{b}) = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} \Rightarrow \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\varepsilon}$$

pois

$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot [\varepsilon_{\perp} \mathbf{b} + (\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}] = \varepsilon_{\perp} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + (\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = [\varepsilon_{\perp} \mathbf{a} + (\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{c}] \cdot \mathbf{b} = \varepsilon_{\perp} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + (\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{b}) \end{array} \right.$$

Nota: Num meio anisotrópico recíproco, cuja anisotropia é descrita pela sua função dielétrica $\boldsymbol{\varepsilon}$, é sempre $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{a}) = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{a})$.



É agora possível definir a função inversa $\boldsymbol{\varepsilon}^{-1}$. Será, com $\mathbf{B} \in \overset{2}{\wedge} \mathbb{R}^3$,

$$\det(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{B} \mathbf{e}_{123} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{e}_{123}) \mathbf{B} = \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{e}_{123} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{B})].$$

Logo, fazendo $\mathbf{a} = \mathbf{B} \mathbf{e}_{123} \in \mathbb{R}^3$, vem

$$\det(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{a} = \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{e}_{123} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{a} \mathbf{e}_{123}^{-1})] \Rightarrow \mathbf{a} = \boldsymbol{\varepsilon} \left[\frac{\mathbf{e}_{123}}{\det(\boldsymbol{\varepsilon})} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{a} \mathbf{e}_{123}^{-1}) \right]$$

pelo que se obtém a seguinte definição:

$$\text{função inversa} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{\varepsilon}^{-1}(\mathbf{a}) = -\frac{\mathbf{e}_{123}}{\det(\boldsymbol{\varepsilon})} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{a} \mathbf{e}_{123})}.$$

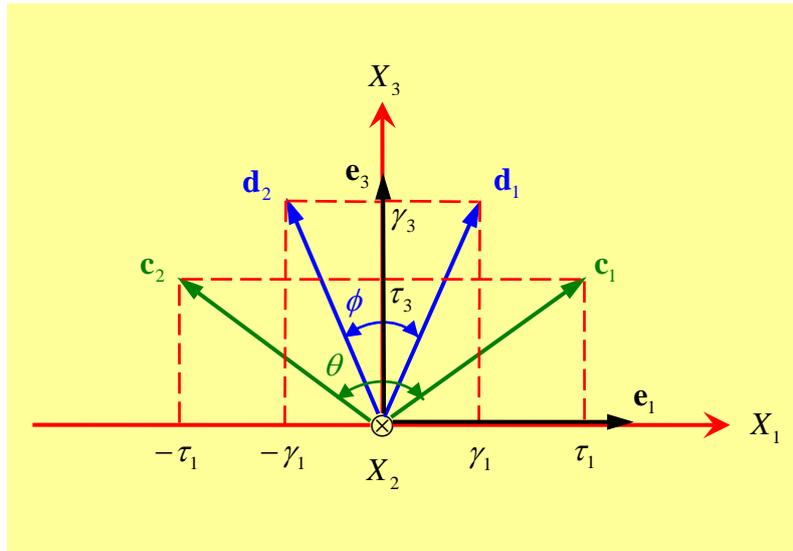
Consideremos, como exemplo de aplicação, o cálculo da inversa da função dielétrica no caso de um cristal não-magnético biaxial. Então, com $\varepsilon_3 > \varepsilon_2 > \varepsilon_1$, vem

$$\left| \begin{array}{l} \alpha = \varepsilon_2 \\ \beta = \frac{1}{2}(\varepsilon_3 - \varepsilon_1) \end{array} \right. \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{a}) = \alpha \mathbf{a} + \beta [(\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}_1) \mathbf{d}_2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}_2) \mathbf{d}_1]$$

tendo-se ainda

$$\left| \begin{array}{l} \alpha_0 = \frac{1}{\varepsilon_2} \\ \beta_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon_3} - \frac{1}{\varepsilon_1} \right) \end{array} \right. \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}^{-1}(\mathbf{a}) = \alpha_0 \mathbf{a} + \beta_0 [(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}_1) \mathbf{c}_2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}_2) \mathbf{c}_1]$$

em que, como se indica na figura anexa,



$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa = \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2} \\ \zeta = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \tau_1 = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\varepsilon_3}{(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)\varepsilon_2}} = \sqrt{\kappa} \gamma_1 \\ \tau_3 = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)\varepsilon_1}{(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)\varepsilon_2}} = \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \gamma_3 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{c}_1 = \tau_1 \mathbf{e}_1 + \tau_3 \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{c}_2 = -\tau_1 \mathbf{e}_1 + \tau_3 \mathbf{e}_3 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_1 = \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \\ \gamma_3 = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \end{array} \right. \rightarrow \boxed{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\kappa \zeta} \tan\left(\frac{\phi}{2}\right)}$$

$$\boxed{\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2 = \cos \theta = \tau_3^2 - \tau_1^2 = \frac{2\kappa - \kappa\zeta - 1}{\kappa\zeta - 1}}$$

Pode mostrar-se que, num cristal biaxial, os dois eixos ópticos – i.e., as direcções em que as duas ondas características isonormais têm a mesma constante de propagação – são os vectores $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2)$ e não os vectores $(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2)$. Para mais pormenores sobre este assunto consulte-se:

📖 Sérgio A. Matos, Marco A. Ribeiro, and Carlos R. Paiva, “Anisotropy without tensors: a novel approach using geometric algebra,” *Optics Express*, Vol. 15, No. 23, pp. 15175-15186, November 2007.

Comentário: A formulação aqui apresentada é generalizável a outros tipos de anisotropia, incluindo os casos de anisotropia não-recíproca (e.g., magnetoplasmas e ferrites) ou mesmo de bianisotropia (e.g., meios quirais anisotrópicos e meios ómega). No caso da anisotropia geral e recíproca (i.e., correspondente a uma anisotropia simultaneamente eléctrica e magnética em meios recíprocos), a análise leva a uma nova classificação em termos dos eixos ópticos: o meio é, simultaneamente, descrito por uma função dieléctrica $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{a})$ e por uma função permeabilidade magnética $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{a})$ que são funções auto-adjuntas. Tanto $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{a})$ como $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{a})$ podem, agora, ser biaxiais:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\eta}_\varepsilon(\mathbf{a}) = \boldsymbol{\varepsilon}^{-1}(\mathbf{a}) = \eta_2 \mathbf{a} + \frac{1}{2}(\eta_3 - \eta_1)[(\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{a})\mathbf{f}_2 + (\mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{a})\mathbf{f}_1] \\ \boldsymbol{\eta}_\mu(\mathbf{a}) = \boldsymbol{\mu}^{-1}(\mathbf{a}) = \sigma_2 \mathbf{a} + \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1)[(\mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{a})\mathbf{g}_2 + (\mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{a})\mathbf{g}_1] \end{cases}$$

No entanto, o comportamento global do meio é determinado, no caso geral, pela nova função

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{a}) = \varepsilon_2(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)\boldsymbol{\zeta}_e(\mathbf{a}) + \mu_2(\mu_1 - \mu_3)\boldsymbol{\zeta}_m(\mathbf{a}) = \alpha_0 \mathbf{a} + \beta_0 [(\mathbf{c}_a \cdot \mathbf{a})\mathbf{c}_b + (\mathbf{c}_b \cdot \mathbf{a})\mathbf{c}_a]$$

em que $\boldsymbol{\zeta}_e = \boldsymbol{\zeta}_m^{-1} = \boldsymbol{\varepsilon}^{-1}(\boldsymbol{\mu})$ e onde

$$\begin{cases} \alpha_0 = \mu_2(\varepsilon_1 - \varepsilon_3) + \varepsilon_2(\mu_1 - \mu_3) \\ \beta_0 = \frac{\zeta_3 - \zeta_1}{2} \left[(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)\varepsilon_2 + \frac{\mu_2(\mu_3 - \mu_1)}{\zeta_1 \zeta_3} \right]. \end{cases}$$

Os eixos ópticos são, agora, os eixos \mathbf{c}_a e \mathbf{c}_b de $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{a})$. O meio será biaxial, uniaxial ou pseudo-isotrópico de acordo com os três coeficientes

$$i \in \{1, 2, 3\} \rightarrow \boxed{\zeta_i = \frac{\mu_i}{\varepsilon_i}}.$$

Mais precisamente, o meio será: (i) pseudo-isotrópico, quando $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = \zeta_0$; (ii) uniaxial, quando $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_\perp$ e $\zeta_3 = \zeta_\parallel$; (iii) biaxial, quando $\zeta_3 > \zeta_2 > \zeta_1$. Aparece, portanto, uma nova classificação – a de um meio pseudo-isotrópico que é unirrefractivo (e, portanto, não-birrefringente) em que

$$\text{meio pseudo-isotrópico} \rightarrow \zeta_0 = \frac{\mu_1}{\varepsilon_1} = \frac{\mu_2}{\varepsilon_2} = \frac{\mu_3}{\varepsilon_3}.$$

No caso pseudo-isotrópico, tal como no caso isotrópico, apenas existe uma única onda característica (ou isonormal) mas, ao contrário do caso isotrópico, a superfície do vector constante de propagação não é uma esfera mas um elipsóide de revolução.



3. Álgebra Geométrica do Espaço-Tempo de Minkowski: Óptica Relativista

Ao contrário da álgebra vectorial (tridimensional) usual, baseada no produto externo de Gibbs, a álgebra geométrica não está confinada ao espaço \mathbb{R}^3 nem à métrica euclidiana. Vais agora mostrar como é possível construir uma álgebra geométrica apropriada para trabalhar no espaço-tempo de Minkowski da relatividade restrita.

3.1 Relatividade euclidiana?

A ideia essencial da relatividade restrita é a de que, apesar das especificidades próprias do espaço e do tempo enquanto entidades físicas naturalmente distintas, só uma interdependência entre espaço e tempo – que designaremos por espaço-tempo plano de Minkowski – é apropriada para superar a aparente contradição entre mecânica newtoniana e electrodinâmica. O espaço linear de base para a construção da álgebra geométrica do espaço-tempo de Minkowski terá de ser, assim, não o espaço linear \mathbb{R}^3 mas o espaço linear \mathbb{R}^4 . Porém, a métrica euclideana não é aceitável para a descrição do espaço-tempo: a álgebra geométrica Cl_4 , que se baseia numa métrica euclidiana associada a uma base vectorial $\mathcal{B} = \{ \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \}$ em que $\mathbf{e}_0^2 = \mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = \mathbf{e}_3^2 = 1$, conduz a problemas físicos inadmissíveis – como a seguir se demonstra. Designaremos a física associada a Cl_4 como a «relatividade euclidiana».

Comecemos por considerar a trajectória (vulgarmente designada por linha de universo) $\mathbf{r}(t) = (\kappa t)\mathbf{e}_0 + \vec{r}(t) \in \mathbb{R}^4$, com $\vec{r}(t) = x(t)\mathbf{e}_1 + y(t)\mathbf{e}_2 + z(t)\mathbf{e}_3 \in \mathbb{R}^3$, no espaço-tempo descrito por Cl_4 . A constante κ é uma *constante universal*, com dimensões de velocidade, que converte, em qualquer referencial de inércia,

$$t \mapsto \kappa t \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} [t] = \text{segundo} \\ [\kappa t] = \text{metro} \end{cases} .$$

A constante κ tem de ser universal: caso contrário haveria diferentes factores de conversão conforme o referencial de inércia em análise.

Definição: Por referencial de inércia entende-se uma sistema de coordenadas $(\kappa t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$ onde, de acordo com a primeira lei de Newton, uma partícula continua o seu estado de movimento (incluindo o de repouso) com velocidade constante – desde que nenhuma força externa actue sobre ela.

Cada partícula em movimento, descrita por $\mathbf{r}(t) = (\kappa t)\mathbf{e}_0 + \vec{r}(t)$, também pode ser descrita no seu referencial próprio (que não é, necessariamente, um referencial de inércia). Neste novo referencial próprio mede-se um tempo próprio τ através de um relógio hipotético que se move solidariamente com a partícula. Sendo $\{\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$, com $\mathbf{f}_0^2 = \mathbf{f}_1^2 = \mathbf{f}_2^2 = \mathbf{f}_3^2 = 1$, uma base do referencial próprio da partícula, deverá ter-se

$$\mathbf{r}(t) = (\kappa t)\mathbf{e}_0 + \vec{r}(t) = (\kappa \tau)\mathbf{f}_0.$$

A velocidade própria da partícula é agora

$$\begin{cases} \gamma(t) = \frac{dt}{d\tau} \\ \vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \kappa \mathbf{f}_0 \\ \mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \kappa \frac{dt}{d\tau} \mathbf{e}_0 + \frac{d\vec{r}}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \gamma(t)(\kappa \mathbf{e}_0 + \vec{u}) \end{cases}$$

$$\therefore \boxed{\mathbf{u} = \gamma(t)(\kappa \mathbf{e}_0 + \vec{u}) = \kappa \mathbf{f}_0}.$$

Mas, em Cl_4 , é $\mathbf{u}^2 = \gamma^2(\kappa^2 + u^2) = \kappa^2$, com $u = |\vec{u}|$, de modo que

$$\beta = \frac{u}{\kappa} \rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \beta^2}}.$$

Nota: No cálculo do factor γ tem de se escolher a raiz quadrada positiva de forma a ter-se $\gamma = 1$ quando $\beta = 0$.

Também o referencial de inércia onde se observa $\mathbf{r}(t) = (\kappa t)\mathbf{e}_0 + \vec{r}(t)$ deve ser descrito por uma velocidade própria $\mathbf{v} = \kappa \mathbf{e}_0$, com $\mathbf{v}^2 = \kappa^2$. De facto, t é o tempo próprio de uma (nova) partícula (hipotética) solidária com esse referencial de inércia cuja linha de universo é agora $\mathbf{r}(t) = (\kappa t)\mathbf{e}_0$. Podemos, então, escrever

$$\boxed{\mathbf{u} = \gamma(\mathbf{v} + \vec{u}) = \kappa \mathbf{f}_0}.$$

Façamos

$$\begin{cases} \gamma = \cos \theta \\ \gamma \beta = \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \boxed{\beta = \tan \theta}$$

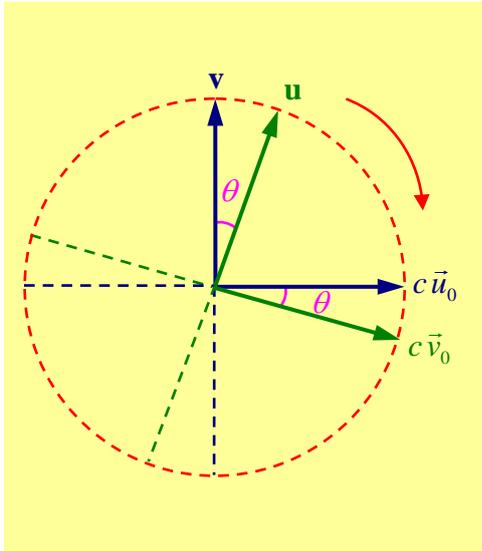
$$\therefore \begin{cases} \vec{u} = \beta \kappa \vec{u}_0 \\ (\vec{u}_0)^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{u} = \cos \theta \mathbf{v} + \sin \theta (\kappa \vec{u}_0).$$

Logo, infere-se sucessivamente que

$$\mathbf{U}_0 = \vec{u}_0 \mathbf{e}_0 = \vec{u}_0 \wedge \mathbf{e}_0 \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{U}_0 \mathbf{v} = (\vec{u}_0 \mathbf{e}_0)(\kappa \mathbf{e}_0) = \kappa \mathbf{e}_0^2 \vec{u}_0 = \kappa \vec{u}_0 \\ \mathbf{U}_0^2 = (\vec{u}_0 \mathbf{e}_0)(\vec{u}_0 \mathbf{e}_0) = -(\mathbf{e}_0 \vec{u}_0)(\vec{u}_0 \mathbf{e}_0) = -(\vec{u}_0)^2 \mathbf{e}_0^2 = -1 \end{cases}$$

$$\mathbf{u} = \cos \theta \mathbf{v} + \sin \theta (\mathbf{U}_0 \mathbf{v}) = (\cos \theta + \mathbf{U}_0 \sin \theta) \mathbf{v}$$

$$\therefore \boxed{\mathbf{u} = \exp(\theta \mathbf{U}_0) \mathbf{v}}.$$



Analogamente, tem-se

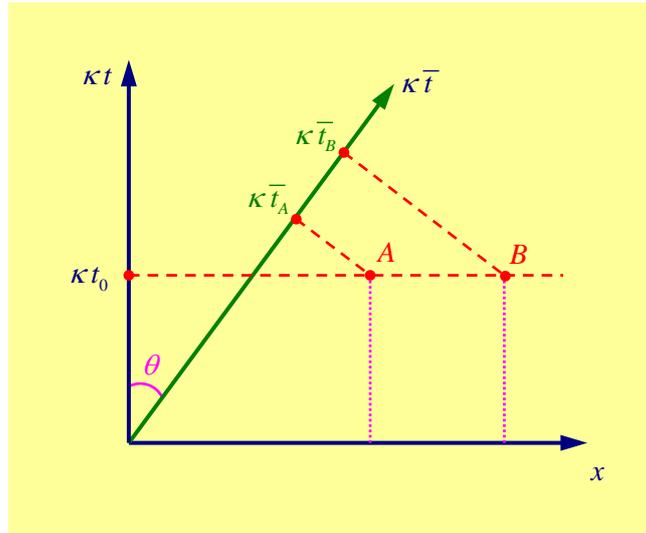
$$\mathbf{U}_0 \vec{u}_0 = (\vec{u}_0 \mathbf{e}_0) \vec{u}_0 = -\mathbf{e}_0 (\vec{u}_0)^2 = -\mathbf{e}_0$$

$$\therefore \begin{cases} \kappa \vec{v}_0 = \exp(\theta \mathbf{U}_0)(\kappa \vec{u}_0) = (\cos \theta + \mathbf{U}_0 \sin \theta)(\kappa \vec{u}_0) \\ = \cos \theta (\kappa \vec{u}_0) - \sin \theta (\kappa \mathbf{e}_0) \\ = \cos \theta (\kappa \vec{u}_0) - \sin \theta \mathbf{v} \end{cases}$$

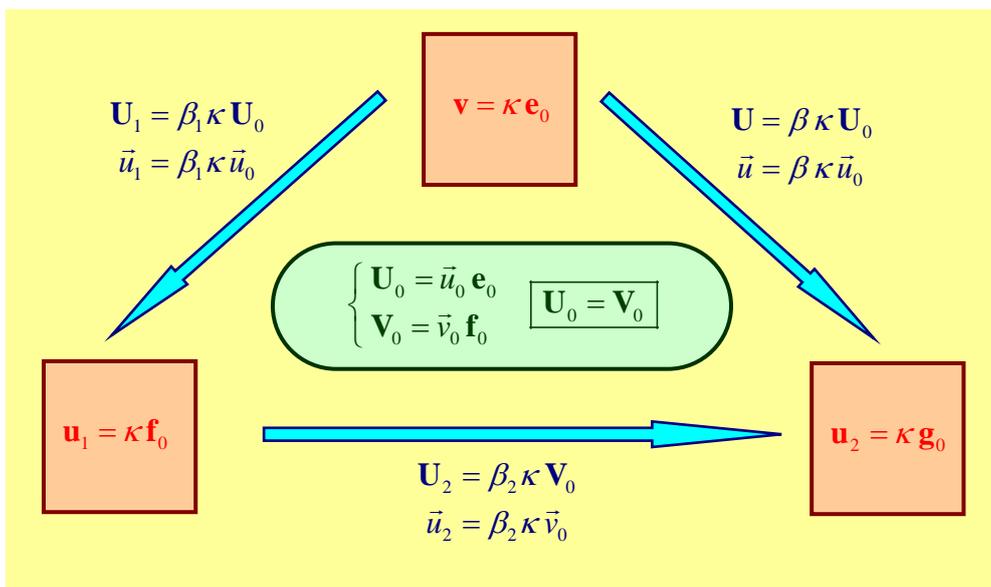
de modo que a transformação $(\mathbf{v} = \kappa \mathbf{e}_0, \kappa \vec{u}_0) \mapsto (\mathbf{u} = \kappa \mathbf{f}_0, \kappa \vec{v}_0)$ corresponde a uma rotação em \mathbb{R}^4 (ver figura anexa).

$$\text{rotação em } \mathbb{R}^4 \rightarrow \begin{cases} \mathbf{u} = \sin \theta (\kappa \vec{u}_0) + \cos \theta \mathbf{v} \\ \kappa \vec{v}_0 = \cos \theta (\kappa \vec{u}_0) - \sin \theta \mathbf{v} \end{cases}$$

Existe uma justificação para se designar a física associada à álgebra euclidiana Cl_4 como relatividade euclidiana: como na relatividade restrita de Einstein, nesta relatividade euclidiana o conceito de simultaneidade é um conceito relativo – tal como a figura anexa da página seguinte ilustra perfeitamente: os acontecimentos A e B são simultâneos no referencial S correspondente a $(\mathbf{v} = \kappa \mathbf{e}_0, \kappa \vec{u}_0)$ pois $t_A = t_B = t_0$, mas não são simultâneos no referencial \bar{S} (agora também considerado como referencial de inércia, admitindo que β é uma constante) correspondente a $(\mathbf{u} = \kappa \mathbf{f}_0, \kappa \vec{v}_0)$ já que $\bar{t}_A < \bar{t}_B$.



Consideremos, agora, no âmbito desta relatividade euclidiana, qual a lei de composição de velocidades. No referencial de inércia (do laboratório), caracterizado pela velocidade própria $\mathbf{v} = \kappa \mathbf{e}_0$, são observadas duas partículas: (i) uma partícula 1, com uma velocidade própria $\mathbf{u}_1 = \exp(\theta_1 \mathbf{U}_0) \mathbf{v}$, em que $\mathbf{U}_0 = \vec{u}_0 \mathbf{e}_0$; (ii) uma partícula 2, com uma velocidade própria $\mathbf{u}_2 = \exp(\theta_2 \mathbf{V}_0) \mathbf{u}_1$, em que $\mathbf{V}_0 = \vec{v}_0 \mathbf{f}_0$. Note-se que, em termos do observador caracterizado por $\mathbf{v} = \kappa \mathbf{e}_0$, a partícula 2 tem uma velocidade própria $\mathbf{u}_2 = \exp(\theta \mathbf{W}_0) \mathbf{v}$, em que (em geral) $\mathbf{W}_0 = \vec{w}_0 \mathbf{e}_0$. Admitamos, porém, que $\vec{w}_0 = \vec{u}_0$, i.e., que $\mathbf{W}_0 = \mathbf{U}_0$ (as velocidades relativas das duas partículas são paralelas do ponto de vista de $\mathbf{v} = \kappa \mathbf{e}_0$). Mas então, neste caso, também $\mathbf{V}_0 = \mathbf{U}_0$. Esta situação encontra-se descrita na figura anexa.



Consequentemente

$$\begin{cases} \mathbf{u}_1 = \exp(\theta_1 \mathbf{U}_0) \mathbf{v} \\ \mathbf{u}_2 = \exp(\theta_2 \mathbf{U}_0) \mathbf{u}_1 = \exp(\theta \mathbf{U}_0) \mathbf{v} \end{cases} \Rightarrow \mathbf{u}_2 = \exp(\theta_2 \mathbf{U}_0) \exp(\theta_1 \mathbf{U}_0) \mathbf{v} = \exp(\theta \mathbf{U}_0) \mathbf{v}$$

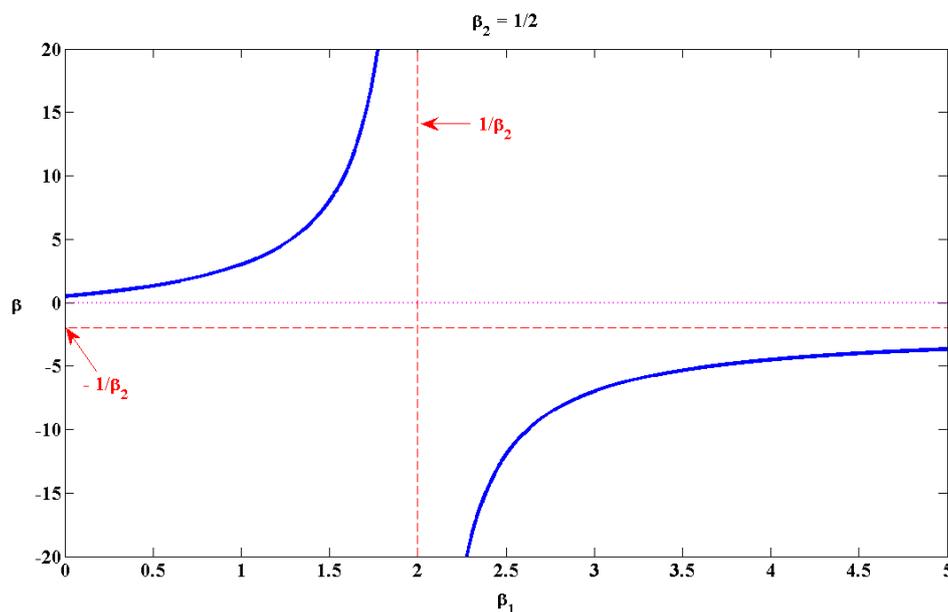
$$\therefore \exp[(\theta_1 + \theta_2) \mathbf{U}_0] = \exp(\theta \mathbf{U}_0) \Rightarrow \boxed{\theta = \theta_1 + \theta_2}.$$

Mas então

$$\tan(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\tan \theta_1 + \tan \theta_2}{1 - \tan \theta_1 \tan \theta_2} \Rightarrow \boxed{\beta = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 - \beta_1 \beta_2}}$$

$$\therefore \begin{cases} u_1 = |\vec{u}_1| = \beta_1 \kappa \\ u_2 = |\vec{u}_2| = \beta_2 \kappa \\ u = |\vec{u}| = \beta \kappa \end{cases} \Rightarrow \boxed{u = \frac{u_1 + u_2}{1 - \frac{u_1 u_2}{\kappa^2}}}.$$

Na figura seguinte representa-se a variação de β com β_1 para $\beta_2 = 1/2$. De acordo com esta lei de adição de velocidades, não existe qualquer limite máximo para a velocidade de uma partícula já que $\beta \rightarrow \infty$ quando $\beta_1 \rightarrow 1/\beta_2$. Por outro lado, duas velocidades positivas, com $\beta_1 > 0$ e $\beta_2 > 0$, dão origem a uma velocidade negativa com $\beta < 0$ para $\beta_1 > 1/\beta_2$.



Estes resultados fisicamente inaceitáveis levam a questionar esta relatividade euclidiana. A única forma de ultrapassar estas contradições é a de aceitar que existe um limite máximo para a velocidade de uma partícula. Esse limite só existe se, em vez da métrica euclidiana associada a $\mathcal{C}l_4$, se adoptar uma métrica não euclidiana.

“Henceforth space by itself, and time by itself, are doomed to fade away into mere shadows, and only a kind of union of the two will preserve an independent reality.”

Hermann Minkowski, “Space and Time.” In: H. A. Lorentz, A. Einstein, H. Weyl, and H. Minkowski, *The Principle of Relativity*. New York: Dover (1923) 1952 (p. 75)

3.2 Álgebra geométrica do espaço-tempo de Minkowski

As considerações anteriores foram motivadas pelas seguinte ideia: a relatividade restrita pode, em princípio, ser construída sem o segundo postulado de Einstein sobre a constância da velocidade da luz. Do ponto de vista epistemológico isso faz sentido: nada indica que seja o electromagnetismo a ter que decidir esta questão. Nada parece indicar, com efeito, que as outras três interacções (gravitacional, nuclear forte e nuclear fraca) tenham de ter um papel subordinado.

Porém, a relatividade euclidiana leva a contradições físicas absurdas porque não tem em linha de conta que existe um limite máximo para a propagação de sinais físicos – esse limite é $\kappa = c$ (partindo da hipótese de que, tanto quanto a experiência nos diz, os fótons não têm massa – embora qualquer bóson com massa nula fosse igualmente bom). O edifício matemático da álgebra geométrica euclidiana Cl_4 foi, portanto, o responsável por essas conclusões contraditórias. E, como nada existe que – atendendo à isotropia do espaço vazio – nos permita fazer uma distinção entre as três dimensões espaciais, somos levados a ter que aceitar que: (i) os dois modelos de espaços quadráticos (Apêndice D) com métricas definidas (positiva, no caso de $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^{4,0}$; negativa, no caso de $\mathbb{R}^{0,4}$)

$$\begin{array}{l} \text{métricas definidas} \\ \text{(positivas e negativas)} \end{array} \mapsto \begin{array}{l} \mathbb{R}^{4,0} \rightarrow Cl_{4,0} = Cl_4 \rightarrow \mathbf{e}_0^2 = \mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = \mathbf{e}_3^2 = 1 \\ \mathbb{R}^{0,4} \rightarrow Cl_{0,4} \rightarrow \mathbf{e}_0^2 = \mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = \mathbf{e}_3^2 = -1 \end{array}$$

levam a uma relatividade euclidiana inaceitável; (ii) os outros dois modelos restantes de espaços quadráticos com métricas semi-definidas (positiva ou negativa) são, deste modo, os que conduzem a uma física aceitável – a física da relatividade restrita de Einstein:

$$\begin{array}{l} \text{métricas semi-definidas} \\ \text{(positivas e negativas)} \end{array} \mapsto \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^{3,1} \rightarrow Cl_{3,1} \rightarrow \mathbf{e}_0^2 = -1, \mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = \mathbf{e}_3^2 = 1 \\ \mathbb{R}^{1,3} \rightarrow Cl_{1,3} \rightarrow \mathbf{e}_0^2 = 1, \mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = \mathbf{e}_3^2 = -1 \end{array} \right.$$

Como nada existe do ponto de vista físico que permita fazer uma distinção entre $Cl_{1,3}$ e $Cl_{3,1}$, vai-se fazer uma escolha ditada por uma *convenção* – talvez a mais adoptada na literatura mas, ainda assim, uma convenção: adopta-se, doravante, a álgebra $Cl_{1,3}$ como o nosso modelo matemático para a relatividade rerita, i.e., para o espaço-tempo plano de Minkowski.

Métrica: A métrica de um espaço quadrático onde está definida uma base $\mathcal{B} = \{ \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \}$ corresponde ao tensor cujas componentes são $\eta_{\alpha\beta}$ tais que, com $\alpha, \beta \in \{0, 1, 2, 3\}$,

$$\boxed{\text{métrica de Lorentz do espaço quadrático } \mathbb{R}^{1,3}} \rightarrow \boxed{\eta_{\alpha\beta} = \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta} \rightarrow \eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta + \mathbf{e}_\beta \mathbf{e}_\alpha = 2\eta_{\alpha\beta}} .$$

Portanto, para um dado acontecimento \mathbf{r} do espaço de Minkowski, tem-se

$$\boxed{Cl_{1,3}} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{r} = (x_0, x_1, x_2, x_3) = x_0 \mathbf{e}_0 + x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 \in \mathbb{R}^{1,3} \\ \mathbf{r}^2 = x_0^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

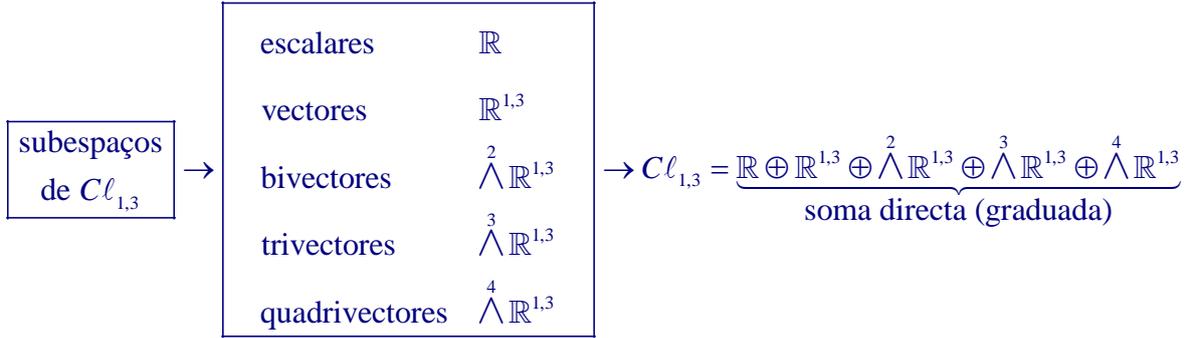
o que significa que $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^{1,3}$ e $\vec{r} \in \mathbb{R}^{0,3}$, ou seja,

$$\boxed{x_0 = ct} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{r} = x_0 \mathbf{e}_0 + \vec{r} \\ \vec{r} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{r}^2 = x_0^2 + (\vec{r})^2 \\ (\vec{r})^2 = -|\vec{r}|^2 \end{array} \right. \leftarrow |\vec{r}|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 .$$

Assim, existem as seguintes três possibilidades:

$$\boxed{\text{classificação dos vectores no espaço-tempo de Minkowski}} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{r}^2 = 0 \mapsto \text{vector parabólico (ou do tipo luz)} \\ \mathbf{r}^2 > 0 \mapsto \text{vector hiperbólico (ou do tipo tempo)} \\ \mathbf{r}^2 < 0 \mapsto \text{vector elíptico (ou do tipo espaço)} \end{array} \right.$$

Podemos agora definir de forma mais clara a álgebra geométrica $Cl_{1,3}$ do espaço-tempo de Minkowski.



base de $Cl_{1,3} \rightarrow \mathcal{B} = \{1, \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_{01}, \mathbf{e}_{02}, \mathbf{e}_{03}, \mathbf{e}_{12}, \mathbf{e}_{13}, \mathbf{e}_{23}, \mathbf{e}_{012}, \mathbf{e}_{013}, \mathbf{e}_{023}, \mathbf{e}_{123}, \mathbf{e}_{0123}\}$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

$\dim(Cl_{1,3}) = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 2^4 = 16$

1	$\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$	$\{\mathbf{e}_{01}, \mathbf{e}_{02}, \mathbf{e}_{03}, \mathbf{e}_{12}, \mathbf{e}_{13}, \mathbf{e}_{23}\}$	$\{\mathbf{e}_{012}, \mathbf{e}_{013}, \mathbf{e}_{023}, \mathbf{e}_{123}\}$	$\mathbf{I} = \mathbf{e}_{0123}$
\updownarrow	\updownarrow	\updownarrow	\updownarrow	\updownarrow
escalares	vectores	bivectores	trivectores	pseudoescalares

$\alpha \in \bigwedge^0 \mathbb{R}^{1,3} = \mathbb{R}$ $\mathbf{a} \in \bigwedge^1 \mathbb{R}^{1,3} = \mathbb{R}^{1,3}$ $\mathbf{F} \in \bigwedge^2 \mathbb{R}^{1,3}$ $\mathbf{T} \in \bigwedge^3 \mathbb{R}^{1,3}$ $\mathbf{V} \in \bigwedge^4 \mathbb{R}^{1,3}$	\rightarrow	$u = \underbrace{\alpha}_{\langle u \rangle_0} + \underbrace{\mathbf{a}}_{\langle u \rangle_1} + \underbrace{\mathbf{F}}_{\langle u \rangle_2} + \underbrace{\mathbf{T}}_{\langle u \rangle_3} + \underbrace{\mathbf{V}}_{\langle u \rangle_4} \in Cl_{1,3}$	\leftarrow multivector
---	---------------	--	--------------------------

$\tilde{\mathbf{e}}_{123} = \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_{123} \Rightarrow \mathbf{e}_{123}^2 = -\mathbf{e}_{123} \tilde{\mathbf{e}}_{123} = -(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3)(\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1) = -\mathbf{e}_1^2 \mathbf{e}_2^2 \mathbf{e}_3^2 = 1$

$\tilde{\mathbf{I}} = \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_0 = -\mathbf{e}_0 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 = \mathbf{I}$

$\therefore \mathbf{I}^2 = \mathbf{I}\mathbf{I} = \tilde{\mathbf{I}}\tilde{\mathbf{I}} = (\mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3)(\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_0) = \mathbf{e}_0^2 \mathbf{e}_1^2 \mathbf{e}_2^2 \mathbf{e}_3^2 = -1$

$\mathbf{e}_0 \mathbf{I} = \mathbf{e}_0 (\mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_0^2 (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_{123}$ $\mathbf{I} \mathbf{e}_0 = (\mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3) \mathbf{e}_0 = -\mathbf{e}_0^2 (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3) = -\mathbf{e}_{123}$	\Rightarrow	$\mathbf{e}_0 \mathbf{I} = -\mathbf{I} \mathbf{e}_0$
--	---------------	--

$\mathbf{e}_{10} \mathbf{I} = \mathbf{e}_{10} (\mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_0^2 \mathbf{e}_1^2 (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3) = -\mathbf{e}_{23}$ $\mathbf{I} \mathbf{e}_{10} = (\mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3) \mathbf{e}_{10} = \mathbf{e}_0^2 \mathbf{e}_1^2 (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3) = -\mathbf{e}_{23}$	\Rightarrow	$\mathbf{e}_{10} \mathbf{I} = \mathbf{I} \mathbf{e}_{10}$
--	---------------	---

$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{e}_{123}\mathbf{I} = (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)(\mathbf{e}_0\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3) = -\mathbf{e}_0(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)^2 = -\mathbf{e}_0\mathbf{e}_{123}^2 = \mathbf{e}_0 \\ \mathbf{I}\mathbf{e}_{123} = (\mathbf{e}_0\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_0(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)^2 = \mathbf{e}_0\mathbf{e}_{123}^2 = -\mathbf{e}_0 \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{\mathbf{e}_{123}\mathbf{I} = -\mathbf{I}\mathbf{e}_{123}}$$

Regra: Em $C\ell_{1,3}$ os vectores e os trivectores anti-comutam com o pseudoescalar unitário \mathbf{I} ; os bivectores comutam com \mathbf{I} .

Dualidade: Dado um multivector genérico $u \in C\ell_{1,3}$ define-se o correspondente *dual de Clifford* como sendo o novo multivector $v = u\mathbf{e}_{0123} = u\mathbf{I} \in C\ell_{1,3}$ tal que

$$u = \alpha + \mathbf{a} + \mathbf{F} + \mathbf{bI} + \beta\mathbf{I} \quad \mapsto \quad v = u\mathbf{I} = -\beta - \mathbf{b} + \mathbf{FI} + \mathbf{aI} + \alpha\mathbf{I}.$$

Assim, em particular

$$\left| \begin{array}{llllll} \langle u \rangle_0 = \alpha & \langle u \rangle_1 = \mathbf{a} & \langle u \rangle_2 = \mathbf{F} & \langle u \rangle_3 = \mathbf{bI} & \langle u \rangle_4 = \beta\mathbf{I} \\ \langle v \rangle_0 = -\beta & \langle v \rangle_1 = -\mathbf{b} & \langle v \rangle_2 = \mathbf{FI} & \langle v \rangle_3 = \mathbf{aI} & \langle v \rangle_4 = \alpha\mathbf{I} \end{array} \right.$$

Existe em $C\ell_{1,3}$ uma distinção importante a fazer: é necessário distinguir entre vectores próprios (ou absolutos) e vectores relativos.

$$\boxed{\text{vector próprio ou absoluto}} \rightarrow \boxed{\mathbf{r} = (ct)\mathbf{e}_0 + \vec{r}} \rightarrow \left| \begin{array}{l} \mathbf{r}\mathbf{e}_0 = ct + \mathbf{R} \\ \mathbf{e}_0\mathbf{r} = ct - \mathbf{R} \end{array} \right. \leftarrow \mathbf{R} = \vec{r}\mathbf{e}_0 = \vec{r} \wedge \mathbf{e}_0$$

$$\boxed{\text{vector relativo (um bivector)}} \rightarrow \boxed{\mathbf{R} = \vec{r}\mathbf{e}_0 = \vec{r} \wedge \mathbf{e}_0 = -\mathbf{e}_0 \wedge \vec{r} = -\mathbf{e}_0\vec{r}}$$

$$\boxed{\text{invariante em } C\ell_{1,3}} \rightarrow \boxed{\mathbf{r}^2 = (\mathbf{r}\mathbf{e}_0)(\mathbf{e}_0\mathbf{r}) = (ct + \mathbf{R})(ct - \mathbf{R}) = c^2t^2 - \mathbf{R}^2}$$

Nota: Em $C\ell_{1,3}$, se $r = |\vec{r}|$ então $\mathbf{R}^2 = (\vec{r}\mathbf{e}_0)^2 = -(\vec{r}\mathbf{e}_0)(\mathbf{e}_0\vec{r}) = -(\vec{r})^2\mathbf{e}_0^2 = -(\vec{r})^2 = r^2 \geq 0$.

Reverso: Sendo $u \in C\ell_{1,3}$ um multivector genérico com $u = \alpha + \mathbf{a} + \mathbf{F} + \mathbf{bI} + \beta\mathbf{I}$, o seu reverso é $\tilde{u} = \alpha + \mathbf{a} - \mathbf{F} - \mathbf{bI} + \beta\mathbf{I}$.

Classificação dos bivectores: Ao contrário de $C\ell_3$ em que todos os bivectores são simples (correspondem a lâminas com um quadrado negativo), em $C\ell_{1,3}$ nem todos os bivectores são simples. Por exemplo: o bivector $\mathbf{F} = \mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$ não é simples pois

$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{e}_0^2 \stackrel{1}{=} (\mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1)(\mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1) = -\mathbf{e}_0^2 \mathbf{e}_1^2 = 1 \\ \mathbf{e}_2^2 \stackrel{3}{=} (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3)(\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3) = -\mathbf{e}_2^2 \mathbf{e}_3^2 = -1 \end{array} \right. \rightarrow \left| \begin{array}{l} \mathbf{F}^2 = (\mathbf{e}_{01} + \mathbf{e}_{23})^2 = (\mathbf{e}_{01} + \mathbf{e}_{23})(\mathbf{e}_{01} + \mathbf{e}_{23}) \\ = \mathbf{e}_{01}^2 + \mathbf{e}_{0123} + \mathbf{e}_{2301} + \mathbf{e}_{23}^2 \\ = 1 + \mathbf{I} + \mathbf{I} - 1 \\ = 2\mathbf{I} \in \bigwedge^4 \mathbb{R}^{1,3}. \end{array} \right.$$

Os bivectores simples podem ser, tal como os vectores, parabólicos, hiperbólicos e elípticos. Assim, e.g., $\mathbf{e}_{01} = \mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_1$ é um bivector hiperbólico enquanto que $\mathbf{e}_{23} = \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$ é um bivector elíptico. Já o bivector $\mathbf{F} = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3$ é simples e parabólico:

$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{F}^2 = (\mathbf{e}_{10} + \mathbf{e}_{13})^2 = (\mathbf{e}_{10} + \mathbf{e}_{13})(\mathbf{e}_{10} + \mathbf{e}_{13}) \\ = \mathbf{e}_{10}^2 + \mathbf{e}_{1013} + \mathbf{e}_{1310} + \mathbf{e}_{13}^2 \\ = 1 - \mathbf{e}_{03} + \mathbf{e}_{03} - 1 \\ = 0 \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

A grande diferença entre os bivectores elípticos e hiperbólicos é que os primeiros geram rotações enquanto que os segundos geram «boosts» (ou transformações activas de Lorentz).

$$\left| \begin{array}{ll} \text{«boost»} & \rightarrow \exp(\zeta \mathbf{e}_{10}) = \cosh \zeta + \mathbf{e}_{10} \sinh \zeta \\ \text{rotação espacial} & \rightarrow \exp(\theta \mathbf{e}_{23}) = \cos \theta + \mathbf{e}_{23} \sin \theta \end{array} \right.$$

Demonstração: Como $\mathbf{e}_{10}^2 = 1$, tem-se $\mathbf{e}_{10}^{2k} = 1$ e $\mathbf{e}_{10}^{2k+1} = \mathbf{e}_{10}$, pelo que

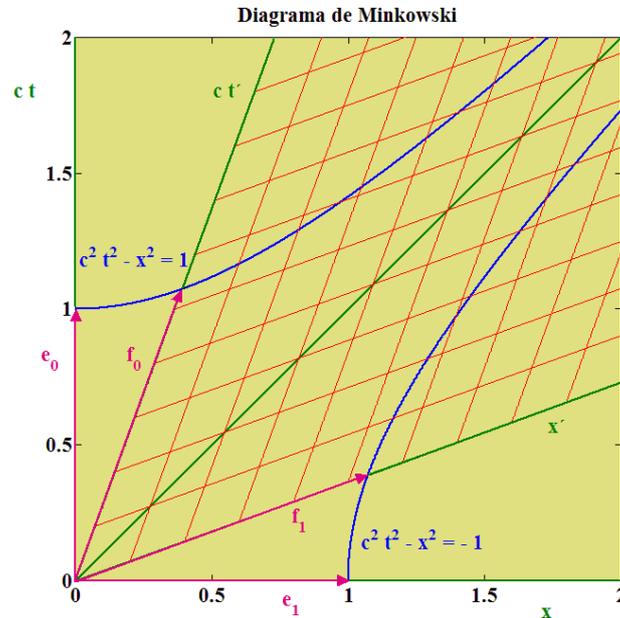
$$\left| \begin{array}{l} \text{«boost»} \rightarrow \exp(\zeta \mathbf{e}_{10}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\zeta \mathbf{e}_{10})^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\zeta \mathbf{e}_{10})^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\zeta \mathbf{e}_{10})^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\zeta^{2k}}{(2k)!} + \mathbf{e}_{10} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\zeta^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cosh \zeta + \mathbf{e}_{10} \sinh \zeta. \end{array} \right.$$

A acção de um «boost» é representável graficamente por um diagrama de Minkowski (ver figura anexa na página seguinte).

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{f}_0 = \exp(\zeta \mathbf{e}_{10}) \mathbf{e}_0 = (\cosh \zeta + \mathbf{e}_{10} \sinh \zeta) \mathbf{e}_0 = \cosh \zeta \mathbf{e}_0 + \sinh \zeta \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{f}_1 = \exp(\zeta \mathbf{e}_{10}) \mathbf{e}_1 = (\cosh \zeta + \mathbf{e}_{10} \sinh \zeta) \mathbf{e}_1 = \cosh \zeta \mathbf{e}_1 + \sinh \zeta \mathbf{e}_0 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} \gamma = \cosh \zeta \\ \gamma \beta = \sinh \zeta \end{cases} \Rightarrow \boxed{\beta = \tanh \zeta} \Rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{f}_0 \\ \mathbf{f}_1 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_0 \\ \mathbf{e}_1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\beta = \tan \theta} \rightarrow \zeta = \tanh^{-1} \beta = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right)$$



«Boost»: Num «boost» $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1) \mapsto (\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1)$, tal como se ilustra no anterior diagrama de Minkowski. Trata-se de uma transformação de Lorentz activa. Definindo o rotor

$$R = \exp\left(\frac{\zeta}{2} \mathbf{e}_{10}\right) \mapsto \tilde{R} = \exp\left(-\frac{\zeta}{2} \mathbf{e}_{10}\right)$$

podemos escrever

$$\text{«boost»} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{f}_0 = R \mathbf{e}_0 \tilde{R} = R^2 \mathbf{e}_0 = \exp(\zeta \mathbf{e}_{10}) \mathbf{e}_0 \\ \mathbf{f}_1 = R \mathbf{e}_1 \tilde{R} = R^2 \mathbf{e}_1 = \exp(\zeta \mathbf{e}_{10}) \mathbf{e}_1 \end{cases}$$

Com efeito,

$$\begin{cases} \mathbf{e}_{10} \mathbf{e}_0 = (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_0) \mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_{10} = \mathbf{e}_0 (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_0) = -\mathbf{e}_1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\mathbf{e}_{10} \mathbf{e}_0 = -\mathbf{e}_0 \mathbf{e}_{10}} \Rightarrow \boxed{R \mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_0 \tilde{R}}$$

$$\begin{cases} \mathbf{e}_{10} \mathbf{e}_1 = (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_0) \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_0 \\ \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_{10} = \mathbf{e}_1 (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_0) = -\mathbf{e}_0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\mathbf{e}_{10} \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_{10}} \Rightarrow \boxed{R \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1 \tilde{R}}$$

Note-se que

$$\begin{cases} \mathbf{e}_{10} \mathbf{e}_2 = (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_0) \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_{012} \\ \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_{10} = \mathbf{e}_2 (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_0) = -\mathbf{e}_{012} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\mathbf{e}_{10} \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_{10}} \Rightarrow \boxed{R \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2 R}$$

de forma que o «boost» deixa \mathbf{e}_2 inalterado: $\mathbf{f}_2 = R\mathbf{e}_2\tilde{R} = R\tilde{R}\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2$.

Transformação passiva de Lorentz: A álgebra $\mathcal{Cl}_{1,3}$ é particularmente eficiente a tratar transformações activas de vectores, e.g., $\mathbf{e}_0 \mapsto \mathbf{f}_0 = R\mathbf{e}_0\tilde{R}$, tal como se viu anteriormente. As transformações passivas também podem ser obtidas. Para simplificar considera-se $y = z = 0$.

$$\mathbf{r} = \underbrace{(ct)\mathbf{e}_0 + x\mathbf{e}_1}_{\text{referencial } S} = \underbrace{(c\bar{t})\mathbf{f}_0 + \bar{x}\mathbf{f}_1}_{\text{referencial } \bar{S}}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}_0 \\ \mathbf{f}_1 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_0 \\ \mathbf{e}_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{f}_0 = \gamma(\mathbf{e}_0 + \beta\mathbf{e}_1) \\ \mathbf{f}_1 = \gamma(\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_0) \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} (ct)\mathbf{e}_0 + x\mathbf{e}_1 = (c\bar{t})\mathbf{f}_0 + \bar{x}\mathbf{f}_1 \\ = \gamma(c\bar{t})(\mathbf{e}_0 + \beta\mathbf{e}_1) + \gamma\bar{x}(\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_0) \\ = \gamma[(c\bar{t}) + \beta\bar{x}]\mathbf{e}_0 + \gamma[\bar{x} + \beta(c\bar{t})]\mathbf{e}_1 \end{cases}$$

Inferre-se, deste modo, que a transformação de Lorentz passiva será

$$\begin{cases} ct = \gamma[(c\bar{t}) + \beta\bar{x}] \\ x = \gamma[\bar{x} + \beta(c\bar{t})] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c\bar{t} = [(ct) - \beta x] \\ \bar{x} = \gamma[x - \beta(ct)] \end{cases}$$

Num diagrama de Minkowski, tal como o que se apresentou anteriormente, é então muito fácil construir os eixos $c\bar{t}$ e \bar{x} . O eixo $c\bar{t}$ corresponde a ter-se $\bar{x} = 0$ e, portanto, corresponde à equação $x = vt = \beta(ct)$, pelo que (ver diagrama de Minkowski da página anterior)

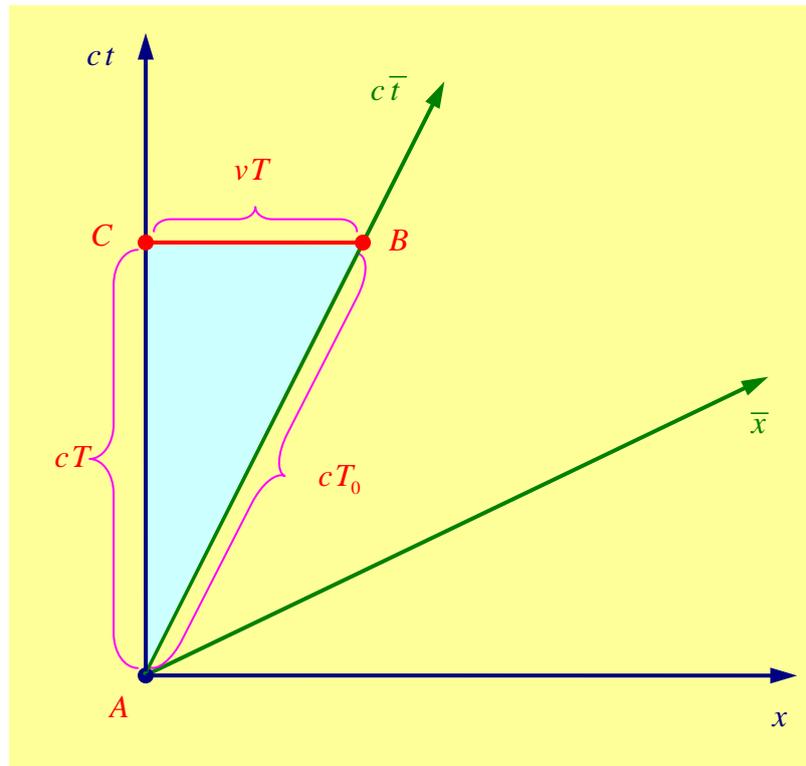
$$\boxed{\text{eixo } c\bar{t}} \rightarrow \tan \theta = \frac{x}{ct} = \beta \leftarrow \begin{cases} \bar{x} = \gamma[x - \beta(ct)] \\ \bar{x} = 0 \end{cases}$$

Analogamente, o eixo \bar{x} corresponde a $c\bar{t} = 0$, i.e., à equação $ct = \beta x$, pelo que

$$\boxed{\text{eixo } \bar{x}} \rightarrow \tan \theta = \frac{ct}{x} = \beta \leftarrow \begin{cases} c\bar{t} = \gamma[(ct) - \beta x] \\ c\bar{t} = 0 \end{cases}$$

A contracção do espaço e a dilatação do tempo podem ser facilmente analisados através de um diagrama de Minkowski.

Dilatação do tempo (graficamente): A título de exemplo vai-se agora analisar graficamente, através de um diagrama de Minkowski, a dilatação do tempo.



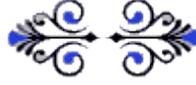
Consideremos um relógio colocado no ponto $\bar{x} = 0$ do referencial \bar{S} que mede um intervalo de tempo T_0 . Do ponto de vista do diagrama de Minkowski (ver figura anexa) trata-se, portanto, de medir o intervalo do tipo tempo entre dois acontecimentos A e B . Em ambos os referenciais S e \bar{S} tem-se $A(0,0)$. Porém, no referencial \bar{S} , deverá ter-se $B(cT_0, 0)$; no referencial S , no entanto, tem-se $B(cT, vT)$. Assim, podemos escrever

$$\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB} \quad \therefore (cT)\mathbf{e}_0 + (vT)\mathbf{e}_1 = (cT_0)\mathbf{f}_0.$$

Fazendo o produto interno de ambos os membros desta última equação pelo vector de base \mathbf{e}_0 , obtém-se então

$$(cT)\underbrace{(\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_0)}_1 + (vT)\underbrace{(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_0)}_0 = (cT_0)\underbrace{(\mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{e}_0)}_\gamma \Rightarrow \boxed{T = \gamma T_0} \leftarrow \begin{array}{|c|} \hline \text{dilatação} \\ \hline \text{do tempo} \\ \hline \end{array}.$$

A contracção do espaço poderia ser analisada de forma análoga.



A partir de $\mathbf{r} = (ct)\mathbf{e}_0 + \vec{r}$ determina-se a velocidade própria \mathbf{u} de uma partícula:

$$\boxed{\mathbf{v} = c\mathbf{e}_0} \rightarrow \mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \gamma(\mathbf{v} + \vec{u}) = c\mathbf{f}_0$$

$$\therefore \boxed{\mathbf{U}_0 = \vec{u}_0\mathbf{e}_0} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{u} = \exp(\zeta \mathbf{U}_0)\mathbf{v} = \cosh \zeta \mathbf{v} + \sinh \zeta (c\vec{u}_0) \\ c\vec{v}_0 = \exp(\zeta \mathbf{U}_0)(c\vec{u}_0) = \cosh \zeta (c\vec{u}_0) + \sinh \zeta \mathbf{v} \end{cases}$$

A velocidade relativa da partícula será

$$\text{velocidade relativa} \rightarrow \boxed{\mathbf{U} = \vec{u}\mathbf{e}_0 = \vec{u} \wedge \mathbf{e}_0}.$$

Nota: Dados dois observadores caracterizados pelas velocidades próprias \mathbf{u} e \mathbf{v} , a velocidade relativa de \mathbf{u} em relação a \mathbf{v} será dada por

$$\boxed{\mathbf{U} = c \frac{\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}}.$$

$$\therefore \mathbf{u} = \gamma(\mathbf{v} + \vec{u}) \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \gamma(\vec{u} \wedge \mathbf{v}) \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \gamma v^2 = \gamma c^2 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{U} = \frac{\vec{u} \wedge \mathbf{v}}{c} = \vec{u} \wedge \mathbf{e}_0.$$

Tem-se $\mathbf{U}^2 = u^2 = \beta^2 c^2$ pois $u = \beta c = |\vec{u}|$. Assim

$$\begin{cases} \mathbf{u}\mathbf{e}_0 = \gamma(c + \mathbf{U}) \\ \mathbf{e}_0\mathbf{u} = \gamma(c - \mathbf{U}) \end{cases} \Rightarrow \mathbf{u}^2 = (\mathbf{u}\mathbf{e}_0)(\mathbf{e}_0\mathbf{u}) = c^2\gamma^2 \left(1 - \frac{\mathbf{U}^2}{c^2}\right) = c^2\gamma^2(1 - \beta^2) = c^2.$$

A adição de velocidades, ao contrário da relatividade euclidiana, dá agora

$$\begin{cases} \mathbf{u}_1 = \exp(\zeta_1 \mathbf{U}_0)\mathbf{v} \\ \mathbf{u}_2 = \exp(\zeta_2 \mathbf{U}_0)\mathbf{u}_1 = \exp(\zeta \mathbf{U}_0)\mathbf{v} \end{cases} \Rightarrow \mathbf{u}_2 = \exp(\zeta_2 \mathbf{U}_0)\exp(\zeta_1 \mathbf{U}_0)\mathbf{v} = \exp(\zeta \mathbf{U}_0)\mathbf{v}$$

$$\therefore \exp[(\zeta_1 + \zeta_2)\mathbf{U}_0] = \exp(\zeta \mathbf{U}_0) \Rightarrow \boxed{\zeta = \zeta_1 + \zeta_2}.$$

Obtém-se, então, a conhecida fórmula de adição relativista de velocidades que contempla a velocidade $\kappa = c$ como o limite superior assintótico de todas as velocidades de partículas com massa: só as partículas com massa nula é que têm a velocidade limite $\kappa = c$.

$$\tanh(\zeta_1 + \zeta_2) = \frac{\tanh \zeta_1 + \tanh \zeta_2}{1 + \tanh \zeta_1 \tanh \zeta_2} \Rightarrow \boxed{\beta = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2}}$$

$$\therefore \begin{cases} u_1 = |\vec{u}_1| = \beta_1 c \\ u_2 = |\vec{u}_2| = \beta_2 c \\ u = |\vec{u}| = \beta c \end{cases} \Rightarrow \boxed{u = \frac{u_1 + u_2}{1 + \frac{u_1 u_2}{c^2}}}$$

O momento linear (próprio) de uma partícula de massa m será $\mathbf{p} = m\mathbf{u}$ e tem uma relação importante com a energia total \mathfrak{E} da partícula. A inércia da energia estabelece que

$$\boxed{\text{inércia da energia}} \rightarrow \boxed{p_0 = \gamma m c = \frac{\mathfrak{E}}{c}}$$

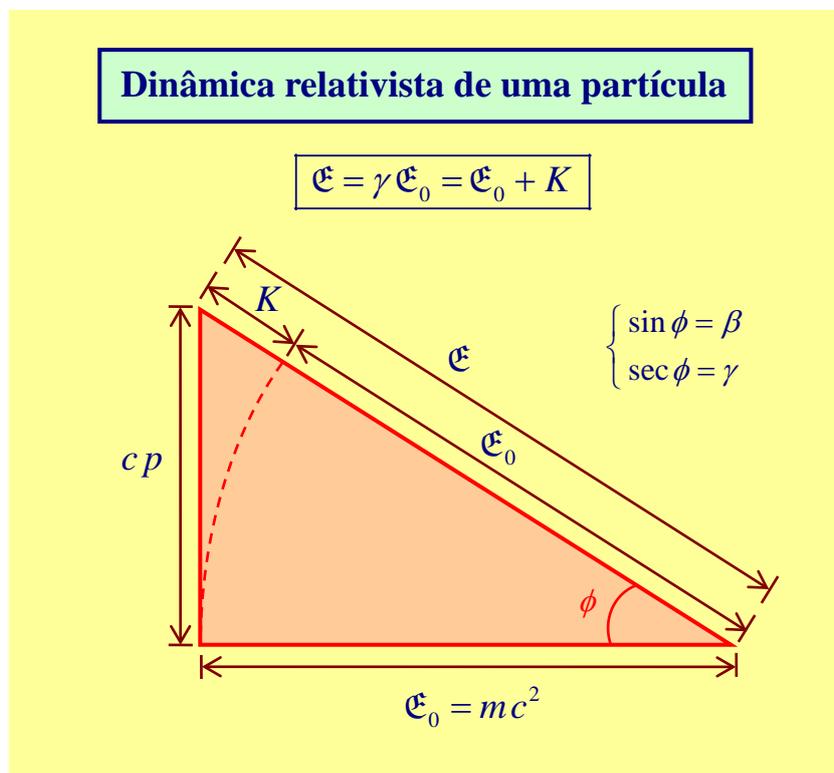
$$\boxed{\text{momento linear de uma partícula}} \rightarrow \mathbf{p} = m\mathbf{u} = \frac{\mathfrak{E}}{c}\mathbf{e}_0 + \vec{p} = (\gamma m c)\mathbf{e}_0 + \gamma m\vec{u}$$

$$\therefore \boxed{\mathfrak{E}_0 = m c^2} \rightarrow \begin{cases} \mathfrak{E} = \gamma \mathfrak{E}_0 \\ \vec{p} = \gamma m\vec{u} \end{cases}$$

$$\boxed{p = |\vec{p}|} \rightarrow \mathbf{p}^2 = m^2 c^2 = \left(\frac{\mathfrak{E}}{c}\right)^2 - p^2 \Rightarrow \boxed{\mathfrak{E} = \sqrt{\mathfrak{E}_0^2 + (c p)^2}}$$

onde $\mathfrak{E}_0 = m c^2$ é a energia intrínseca (ou própria) da partícula. Designando por K a energia cinética, virá portanto

$$\text{energia cinética} \rightarrow \boxed{K = \mathfrak{E} - \mathfrak{E}_0 = (\gamma - 1)\mathfrak{E}_0}$$



Facilmente se verifica que o limite da mecânica newtoniana ($c \rightarrow \infty$) se recupera a partir desta definição de energia cinética.

$$\begin{aligned} \text{energia cinética} &\rightarrow \boxed{K = \mathfrak{E} - \mathfrak{E}_0 = (\gamma - 1)(mc^2)} \\ \gamma - 1 &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \beta^{2n} = \frac{1}{2} \beta^2 + \frac{3}{8} \beta^4 + \frac{15}{48} \beta^6 + \dots \\ K(u) &= \frac{1}{2} m u^2 + \frac{3}{8} m \frac{u^4}{c^2} + \frac{15}{48} m \frac{u^6}{c^4} + \dots \\ \text{mecânica newtoniana } (c \rightarrow \infty) &\rightarrow \boxed{K = \frac{1}{2} m u^2} \end{aligned}$$

Comentário: É errado afirmar que a inércia da energia é traduzida pela equação $\mathfrak{E}_0 = mc^2$. O que a inércia da energia afirma é que

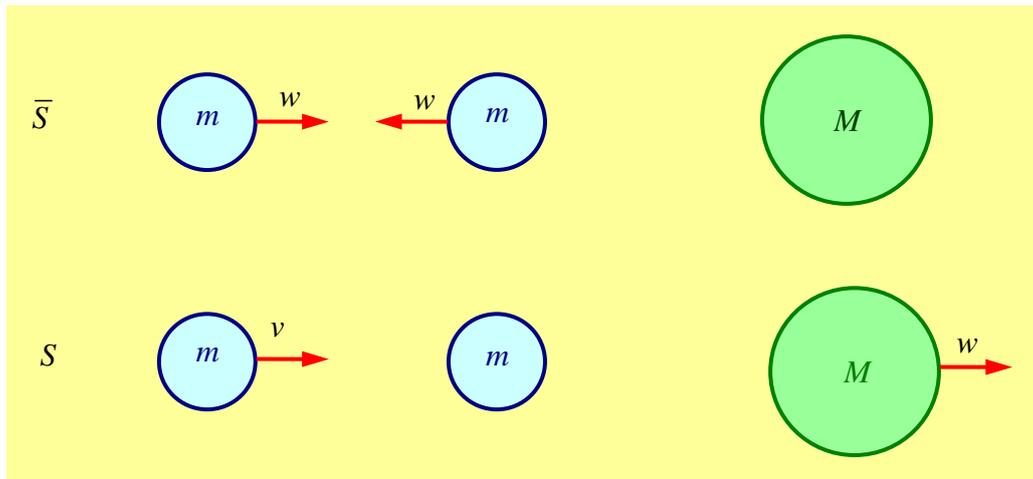
$$\mathfrak{E} = I(u)c^2 = \gamma(u)mc^2 = mc^2 + [\gamma(u) - 1](mc^2) = \mathfrak{E}_0 + K$$

onde $I(u) = \gamma(u)m$ é o *coeficiente de inércia*. A energia própria (em repouso) é apenas uma forma de energia potencial em que $\mathfrak{E}_0 = \mathfrak{E}(u=0)$. A célebre fórmula de Einstein sobre a inércia da energia é pois $\mathfrak{E} = I(u)c^2$ e não $\mathfrak{E}_0 = mc^2$. Antigamente escrevia-se (como o próprio Einstein)

$$\text{expressão (arcaica e a evitar) da massa (variável)} \rightarrow m_u = \gamma(u)m = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

em que m_u seria a massa da partícula em movimento (diferente, portanto, da sua massa em repouso $m = m_0$). Para evitar introduzir este conceito equívoco de «massa em movimento» é que se define o coeficiente de inércia $I(v) = \gamma(v)m$. O conceito arcaico de «massa em movimento» não faz sentido: só existe uma massa m , invariante, que não depende do estado de repouso ou de movimento da partícula. O invariante m é sempre medido no referencial próprio da partícula, i.e., no referencial (instantâneo) onde a partícula se encontra (sempre) em repouso. Mas efectivamente grave (i.e., **erro crasso**) é a introdução de uma «massa transversal» e de uma «massa longitudinal» – conceitos totalmente vazios de qualquer conteúdo físico e apenas usados por autores que nada entendem de mecânica relativista.

Consideremos, a título de exemplo, uma colisão inelástica de duas partículas de massa m que, no referencial \bar{S} onde o momento linear total é nulo, têm velocidades iguais a w embora com sentidos diametralmente opostos. Após a colisão as duas partículas iguais fundem-se numa única partícula de massa M que, no referencial \bar{S} , se encontra em repouso. Num outro referencial S que se desloca, em relação a \bar{S} , com velocidade relativa w a partícula resultante de massa M tem, tal como se indica na figura anexa, uma velocidade w .



Existem dois princípios de conservação a aplicar: (i) a conservação do momento linear; (ii) a conservação da energia total. Partimos do princípio que o momento linear é o produto do coeficiente de inércia pela velocidade enquanto que a energia total é proporcional ao coeficiente de inércia. Mas desconhecemos, à partida, a expressão do coeficiente de inércia: apenas sabemos que depende da velocidade da partícula. A aplicação dos dois princípios de conservação permitirá determinar, então, a expressão do coeficiente de inércia.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{conservação do momento linear em } \bar{S} : I_m(v)\bar{w} - I_m(v)\bar{w} = 0 \\ \text{conservação da energia total em } \bar{S} : 2I_m(w) = M \\ \text{conservação do momento linear em } S : I_m(v)v = I_M(w)w \\ \text{conservação da energia total em } S : I_m(v) + m = I_M(w) \end{array} \right.$$

Dividindo as duas equações de conservação em S , obtém-se

$$w = \frac{I_m(v)v}{I_m(v) + m} \Rightarrow \boxed{\frac{I_m(v)}{m} = \frac{w}{v - w}}$$

Mas, pela composição de velocidades, vem

$$v = \frac{2w}{1 + \frac{w^2}{c^2}} \rightarrow w^2 - 2\frac{c^2}{v}w + c^2 = 0$$

$$\therefore w = \frac{c^2}{v} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right).$$

No limite das pequenas velocidades, virá então ($v \ll c$)

$$w \approx \frac{c^2}{v} \left[1 \pm \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) \right]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \boxed{+} \rightarrow w \approx 2\frac{c^2}{v} - \frac{1}{2}v \\ \boxed{-} \rightarrow w \approx \frac{1}{2}v \end{array} \right.$$

o que mostra que se deve considerar a solução associada ao sinal $\boxed{-}$: basta pensar no limite newtoniano desta experiência conceptual em que este limite deve resultar no caso em que se faz $v/c \rightarrow 0$, i.e., $w = v/2$. Assim

$$w = \frac{c^2}{v} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) \rightarrow v - w = v - \frac{c^2}{v} + \frac{c^2}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$\therefore v - w = \frac{c^2}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right).$$

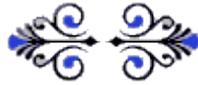
Mas então

$$\frac{I_m(v)}{m} = \frac{w}{v-w} = \frac{\frac{c^2}{v} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)}{\frac{c^2}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\therefore \boxed{I_m(v) = \gamma(v)m}.$$

A equação obtida confirma a expressão geral do coeficiente de inércia. Por outro lado, se se tiver em consideração a equação de conservação da energia total em \bar{S} , obtém-se ainda

$$M = 2I_m(w) = \frac{2m}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}} \rightarrow I_m(w) = \gamma(w)M = \frac{2m}{1 - \frac{w^2}{c^2}}.$$



Em propagação de ondas electromagnéticas há um vector importante – o chamado vector de onda \mathbf{k} . Tem-se

$$\boxed{\text{vector de onda}} \rightarrow \boxed{\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \mathbf{e}_0 + \vec{k}} \rightarrow \boxed{\mathbf{k} = k_0 (\mathbf{e}_0 + \vec{n})} \leftarrow \begin{cases} k_0 = \frac{\omega}{c} \\ \vec{k} = k_0 \vec{n} \end{cases}$$

sendo a velocidade de fase v_p tal que (atenção: não confundir k_0 com \vec{k}_0)

$$\begin{cases} k = |\vec{k}| \\ \vec{k}_0 = \frac{\vec{k}}{k} \end{cases} \rightarrow \boxed{\vec{v}_p = \frac{\omega}{k} \vec{k}_0} \leftarrow (\vec{k}_0)^2 = -1.$$

Nota: A fase Φ de uma onda plana e monocromática corresponde ao produto interno

$$\Phi = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \left(\frac{\omega}{c} \mathbf{e}_0 + \vec{k} \right) \cdot (ct \mathbf{e}_0 + \vec{r}) = \omega t + \vec{k} \cdot \vec{r}.$$

Fazendo $\vec{r} \cdot \vec{k}_0 = -\zeta$, vem $\Phi = \omega t - k \zeta$. Daí que, efectivamente, $d\Phi = \omega dt - k d\zeta$ pelo que $v_p = d\zeta/dt = \omega/k$. A direcção de \vec{v}_p é a mesma de \vec{k} .

No dualismo onda-corpúsculo de Louis de Broglie, tem-se

$$\boxed{\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}} \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{E} = \hbar \omega \\ \vec{p} = \hbar \vec{k} \end{cases}$$

Logo, vem sucessivamente

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^2 &= \mathcal{E}_0^2 + c^2 p^2 & \mapsto & \omega^2 = \omega_0^2 + c^2 k^2 \\ 2\mathcal{E} \frac{d\mathcal{E}}{dp} &= 2c^2 p & \mapsto & 2\omega \frac{d\omega}{dk} = 2c^2 k \\ v = \frac{d\mathcal{E}}{dp} &= \frac{c^2 p}{\mathcal{E}} = \frac{c^2 k}{\omega} & \mapsto & v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c^2 k}{\omega} = \frac{c^2}{v_p} \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{v = v_g}$$

inferindo-se, deste modo, que a velocidade da partícula v é igual à velocidade de grupo v_g do feixe de ondas planas que estaria associado à partícula. Para uma partícula de massa nula, como é o caso do fóton, vem

$$\boxed{m=0} \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{E} = c p \\ \omega = c k \end{cases} \Rightarrow \boxed{v = v_p = v_g = c}.$$

Comentário sobre o dualismo onda-corpúsculo: Na mecânica ondulatória a chamada «função de onda» Ψ não pode ser interpretada como tendo uma relação directa com a partícula. Ao longo do tempo um feixe de ondas vai-se alargando à medida que se propaga – é a divergência espacial provocada pela difracção em espaço livre. Se uma partícula fosse representada por um feixe de ondas Ψ , haveria problemas graves: qualquer partícula iria desintegrar-se ao longo do tempo. Esta interpretação física directa de Ψ é, portanto, incoerente. Deve-se a Max Born a interpretação, ainda hoje aceite, do significado de Ψ : a densidade de probabilidade de encontrar a partícula no ponto x e no instante t é proporcional a $|\Psi(x, t)|^2$. A divergência espacial do feixe de ondas significa apenas o seguinte: à medida que o tempo passa é cada vez mais provável encontrar a partícula fora de uma dada região de observação.

“I wish to create the impression in my readers that the true mathematical structure of these entities will appear only now, as in a mountain landscape when the fog lifts.”

Arnold Sommerfeld, *Electrodynamics*. New York: Academic Press, 1952 (p. 212)

3.3 As equações de Maxwell no espaço-tempo de Minkowski

Para escrever as equações de Maxwell na álgebra geométrica $Cl_{1,3}$ há que começar por escrever as quatro equações vectoriais na álgebra tridimensional de Gibbs. Porém, de forma a integrá-las em $Cl_{1,3}$, os habituais vectores em $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^{3,0}$ têm, agora, de ser considerados no espaço quadrático $\mathbb{R}^{0,3}$. Como se viu atrás

$$Cl_{1,3} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{e}_0^2 = 1 \\ \mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = \mathbf{e}_3^2 = -1 \end{cases} \rightarrow \boxed{\mathbf{a} = a_0 \mathbf{e}_0 + \vec{a} \in \mathbb{R}^{1,3}} \rightarrow \mathbf{a}^2 = a_0^2 - |\vec{a}|^2$$

$$\boxed{\vec{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3 \in \mathbb{R}^{0,3}} \mapsto (\vec{a})^2 = -|\vec{a}|^2 = -(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2).$$

Assim, o operador ∇ é definido como sendo

$$\nabla = \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \in \mathbb{R}^{0,3} \Rightarrow \nabla^2 = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{cases} \vec{E} \in \mathbb{R}^{0,3} & \rightarrow \text{intensidade do campo eléctrico} \\ \vec{B} \in \mathbb{R}^{0,3} & \rightarrow \text{intensidade do campo magnético} \\ \vec{D} \in \mathbb{R}^{0,3} & \rightarrow \text{excitação eléctrica} \\ \vec{H} \in \mathbb{R}^{0,3} & \rightarrow \text{excitação magnética} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho \in \mathbb{R} & \rightarrow \text{densidade de carga eléctrica} \\ \vec{J} \in \mathbb{R}^{0,3} & \rightarrow \text{densidade de corrente eléctrica} \end{cases}$$

As equações de Maxwell em $\mathbb{R}^{0,3}$ escrevem-se então na seguinte forma:

$$\boxed{\text{grupo de Faraday}} \rightarrow \begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases} \quad \boxed{\text{grupo de Maxwell}} \rightarrow \begin{cases} \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{D} = -\rho \end{cases}.$$

Para escrever as equações de Maxwell em $\mathcal{C}\ell_{1,3}$ há que começar por introduzir os correspondentes vectores relativos (que, como se viu atrás, são tecnicamente bivectores hiperbólicos ou do tipo tempo) e definir o operador de Dirac.

$$\begin{array}{l}
 \boxed{\text{vectores relativos}} \\
 \text{(bivectores)}
 \end{array}
 \rightarrow
 \begin{cases}
 \mathbf{E} = \vec{E} \mathbf{e}_0 = \vec{E} \wedge \mathbf{e}_0 \in \wedge^2 \mathbb{R}^{1,3} \\
 \mathbf{B} = \vec{B} \mathbf{e}_0 = \vec{B} \wedge \mathbf{e}_0 \in \wedge^2 \mathbb{R}^{1,3} \\
 \mathbf{D} = \vec{D} \mathbf{e}_0 = \vec{D} \wedge \mathbf{e}_0 \in \wedge^2 \mathbb{R}^{1,3} \\
 \mathbf{H} = \vec{H} \mathbf{e}_0 = \vec{H} \wedge \mathbf{e}_0 \in \wedge^2 \mathbb{R}^{1,3}
 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{densidade de}} \\
 \text{carga-corrente eléctrica}
 \rightarrow \mathbf{J} = \varrho \mathbf{e}_0 + \frac{1}{c} \vec{J} \in \mathbb{R}^{1,3}$$

$$\boxed{\text{operador de Dirac}} \rightarrow \partial = \frac{1}{c} \mathbf{e}_0 \frac{\partial}{\partial t} - \nabla \in \mathbb{R}^{1,3}.$$

Introduzem-se, por fim, os dois bivectores fundamentais do campo electromagnético:

$$\left. \begin{array}{l}
 \mathbf{F} = \frac{1}{c} \mathbf{E} + \mathbf{IB} \rightarrow \text{bivector de Faraday (ou da intensidade EM)} \\
 \mathbf{G} = \mathbf{D} + \frac{1}{c} \mathbf{IH} \rightarrow \text{bivector de Maxwell (ou da excitação EM)}
 \end{array} \right\} .$$

Nota: Na base $\mathcal{B} = \{ \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \}$ de $\mathbb{R}^{1,3}$ tem-se

$$\begin{cases}
 \mathbf{E} = \vec{E} \mathbf{e}_0 = E_1 \mathbf{e}_{10} + E_2 \mathbf{e}_{20} + E_3 \mathbf{e}_{30} \\
 \mathbf{IE} = \mathbf{EI} = -E_1 \mathbf{e}_{23} - E_2 \mathbf{e}_{31} - E_3 \mathbf{e}_{12}
 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \mathbf{F} = \frac{1}{c} (E_1 \mathbf{e}_{10} + E_2 \mathbf{e}_{20} + E_3 \mathbf{e}_{30}) - (B_1 \mathbf{e}_{23} + B_2 \mathbf{e}_{31} + B_3 \mathbf{e}_{12}) \\
 \mathbf{G} = (D_1 \mathbf{e}_{10} + D_2 \mathbf{e}_{20} + D_3 \mathbf{e}_{30}) - \frac{1}{c} (H_1 \mathbf{e}_{23} + H_2 \mathbf{e}_{31} + H_3 \mathbf{e}_{12})
 \end{array} \right\} .$$

Por exemplo:

$$\left. \begin{array}{l}
 \mathbf{e}_{23} \lrcorner \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_{31} \lrcorner \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_{12} \lrcorner \mathbf{e}_3 = 0 \\
 \mathbf{e}_{31} \lrcorner \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_{12} \lrcorner \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 \\
 \mathbf{e}_{12} \lrcorner \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_{23} \lrcorner \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2 \\
 \mathbf{e}_{23} \lrcorner \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_{31} \lrcorner \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_3
 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\vec{u} \times \vec{B} = (\mathbf{IB}) \lrcorner \vec{u}} .$$

$$\left. \begin{array}{l}
 \mathbf{e}_{10} \lrcorner \mathbf{e}_{10} = \mathbf{e}_{20} \lrcorner \mathbf{e}_{20} = \mathbf{e}_{30} \lrcorner \mathbf{e}_{30} = 1 \\
 \mathbf{e}_{10} \lrcorner \mathbf{e}_{20} = \mathbf{e}_{10} \lrcorner \mathbf{e}_{30} = \mathbf{e}_{20} \lrcorner \mathbf{e}_{30} = 0
 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\mathbf{E} \lrcorner \mathbf{D} = -\vec{E} \cdot \vec{D}} .$$

Uma vez apresentados todos os personagens importantes, é agora possível escrever as duas equações de Maxwell da relatividade restrita: (i) a equação homogénea, correspondente ao grupo de Faraday; (ii) a equação não-homogénea, correspondente ao grupo de Maxwell.

As duas equações de Maxwell

$$\boxed{Cl_{1,3}} \rightarrow \begin{cases} \text{equação homogénea} & \rightarrow \partial \wedge \mathbf{F} = 0 \\ \text{equação não-homogénea} & \rightarrow \partial \lrcorner \mathbf{G} = \mathbf{J} \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \partial \wedge \mathbf{F} = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{array} \right. \\ \partial \lrcorner \mathbf{G} = \mathbf{J} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{D} = -\rho \end{array} \right. \end{array}$$

Nota: Na base $\mathcal{B} = \{ \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \}$ de $\mathbb{R}^{1,3}$ tem-se

$$\begin{aligned} \partial \wedge \mathbf{F} = & -\frac{1}{c} \frac{\partial B_1}{\partial t} \mathbf{e}_{023} - \frac{1}{c} \frac{\partial B_2}{\partial t} \mathbf{e}_{031} - \frac{1}{c} \frac{\partial B_3}{\partial t} \mathbf{e}_{012} \\ & - \frac{1}{c} \frac{\partial E_2}{\partial x_1} \mathbf{e}_{012} + \frac{1}{c} \frac{\partial E_3}{\partial x_1} \mathbf{e}_{031} + \frac{\partial B_1}{\partial x_1} \mathbf{e}_{123} \\ & + \frac{1}{c} \frac{\partial E_1}{\partial x_2} \mathbf{e}_{012} - \frac{1}{c} \frac{\partial E_3}{\partial x_2} \mathbf{e}_{023} + \frac{\partial B_2}{\partial x_2} \mathbf{e}_{123} \\ & - \frac{1}{c} \frac{\partial E_1}{\partial x_3} \mathbf{e}_{031} + \frac{1}{c} \frac{\partial E_2}{\partial x_3} \mathbf{e}_{023} + \frac{\partial B_3}{\partial x_3} \mathbf{e}_{123} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial \lrcorner \mathbf{G} = & -\frac{1}{c} \frac{\partial D_1}{\partial t} \mathbf{e}_1 - \frac{1}{c} \frac{\partial D_2}{\partial t} \mathbf{e}_2 - \frac{1}{c} \frac{\partial D_3}{\partial t} \mathbf{e}_3 \\ & + \frac{\partial D_1}{\partial x_1} \mathbf{e}_0 + \frac{1}{c} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \mathbf{e}_3 - \frac{1}{c} \frac{\partial H_3}{\partial x_1} \mathbf{e}_2 \\ & + \frac{\partial D_2}{\partial x_2} \mathbf{e}_0 - \frac{1}{c} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \mathbf{e}_3 + \frac{1}{c} \frac{\partial H_3}{\partial x_2} \mathbf{e}_1 \\ & + \frac{\partial D_3}{\partial x_3} \mathbf{e}_0 + \frac{1}{c} \frac{\partial H_1}{\partial x_3} \mathbf{e}_2 - \frac{1}{c} \frac{\partial H_2}{\partial x_3} \mathbf{e}_1. \end{aligned}$$

No caso particular do vácuo, a relação constitutiva do espaço-tempo é

$$\boxed{\text{relação constitutiva do vácuo em } Cl_{1,3}} \rightarrow \boxed{\mathbf{G} = \frac{1}{\eta_0} \mathbf{F}} \leftarrow \eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}.$$

Então, dado que se pode escrever o produto geométrico

$$\partial \mathbf{F} = \partial \lrcorner \mathbf{F} + \partial \wedge \mathbf{F}$$

as duas equações de Maxwell reduzem-se a uma única equação.

A equação de Maxwell no vácuo

$$\boxed{Cl_{1,3}} \rightarrow \boxed{\partial \mathbf{F} = \eta_0 \mathbf{J}}$$

Nota importante: Apesar de $\mathbf{E} = \vec{E} \wedge \mathbf{e}_0$ e $\mathbf{B} = \vec{B} \wedge \mathbf{e}_0$ serem vectores relativos (dependem do observador $\mathbf{v} = c \mathbf{e}_0$), $\mathbf{F} = \mathbf{E}/c + \mathbf{I}\mathbf{B}$ não é um vector relativo. Analogamente, $\mathbf{D} = \vec{D} \wedge \mathbf{e}_0$ e $\mathbf{H} = \vec{H} \wedge \mathbf{e}_0$ são vectores relativos mas $\mathbf{G} = \mathbf{D} + \mathbf{I}\mathbf{H}/c$ também não é um vector relativo. Com efeito, os bivectores \mathbf{F} e \mathbf{G} representam o campo electromagnético e não dependem de um qualquer observador particular. Por essa razão \mathbf{F} e \mathbf{G} são considerados os dois bivectores fundamentais para a descrição do campo electromagnético. Diferentes observadores registam diferentes decomposições de \mathbf{F} e \mathbf{G} em termos dos seus vectores relativos. Os objectos \mathbf{F} e \mathbf{G} têm, portanto, uma «dignidade» superior a qualquer dos quatro vectores relativos que estão na sua constituição (\mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{D} e \mathbf{H}). Diz-se que os bivectores \mathbf{F} e \mathbf{G} constituem as formas *covariantes* do campo electromagnético. No vácuo a existência de \mathbf{G} é supérflua e apenas existe \mathbf{F} (daí a possibilidade de reduzir as duas equações de Maxwell a uma única equação). Só através da escrita das equações de Maxwell no espaço-tempo, recorrendo aos bivectores \mathbf{F} e \mathbf{G} (ou a entidades matemáticas equivalentes – e.g., tensores) é que estas equações ganham finalmente o seu pleno significado físico. Os vectores relativos \mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{D} e \mathbf{H} são apenas sombras ou vislumbres de uma realidade mais essencial expressa através de \mathbf{F} e \mathbf{G} .

3.4 Meios em movimento

Um dos pontos essenciais desta lição tem sido o estudo do electromagnetismo dos meios materiais. Através da álgebra \mathcal{Cl}_3 estudou-se uma classe importante de meios anisotrópicos. Agora, através da álgebra $\mathcal{Cl}_{1,3}$, vai-se estudar um problema clássico da electrodinâmica: os meios em movimento.

Comecemos por considerar um meio isotrópico simples que, em termos de \mathcal{Cl}_3 , tem as seguintes relações constitutivas

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{meio isotrópico} \\ \text{simples} \end{array}} \rightarrow \begin{cases} \vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} \\ \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H} \end{cases}$$

Em termos dos vectores relativos, obtém-se então sucessivamente

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0 \mu} \mathbf{B} \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{D} + \frac{1}{c} \mathbf{I} \mathbf{H} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E} + \frac{1}{c \mu_0 \mu} \mathbf{I} \mathbf{B}$$

$$\therefore \left. \begin{array}{l} \alpha_1 = \frac{\varepsilon}{\eta_0} \\ \alpha_2 = \frac{1}{\eta_0 \mu} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\mathbf{G} = \mathbf{D} + \frac{1}{c} \mathbf{I} \mathbf{H} = \frac{\alpha_1}{c} \mathbf{E} + \alpha_2 \mathbf{I} \mathbf{B}}$$

Como $\mathbf{v} = c \mathbf{e}_0$ (referencial próprio do meio, i.e., onde este se encontra em repouso), tem-se sucessivamente

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{F}_v = \mathbf{v}^{-1} \mathbf{F} \mathbf{v} = \mathbf{e}_0 \mathbf{F} \mathbf{e}_0 \\ = \mathbf{e}_0 \left(\frac{1}{c} \mathbf{E} + \mathbf{I} \mathbf{B} \right) \mathbf{e}_0 \\ = \mathbf{e}_0 \left(\frac{1}{c} \vec{E} \mathbf{e}_0 + \mathbf{I} \vec{B} \mathbf{e}_0 \right) \mathbf{e}_0 \\ = -\frac{1}{c} \vec{E} \mathbf{e}_0 + \mathbf{I} \vec{B} \mathbf{e}_0 \\ = -\frac{1}{c} \mathbf{E} + \mathbf{I} \mathbf{B}. \end{array} \right\}$$

Logo, para uma combinação linear de \mathbf{F} com \mathbf{F}_v , vem

$$\beta_1 \mathbf{F} + \beta_2 \mathbf{F}_v = \beta_1 \left(\frac{1}{c} \mathbf{E} + \mathbf{I} \mathbf{B} \right) + \beta_2 \left(-\frac{1}{c} \mathbf{E} + \mathbf{I} \mathbf{B} \right) = \frac{1}{c} (\beta_1 - \beta_2) \mathbf{E} + (\beta_1 + \beta_2) \mathbf{I} \mathbf{B}$$

pelo que, fazendo

$$\begin{cases} \beta_1 - \beta_2 = \alpha_1 \\ \beta_1 + \beta_2 = \alpha_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{1}{2\eta_0} \left(\varepsilon + \frac{1}{\mu} \right) \\ \beta_2 = -\frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2) = -\frac{1}{2\eta_0} \left(\varepsilon - \frac{1}{\mu} \right) \end{cases}$$

obtém-se a seguinte relação constitutiva no espaço-tempo de Minkowski

$$\boxed{\text{relação constitutiva no espaço-tempo}} \rightarrow \boxed{\mathbf{G} = \frac{1}{2\eta_0} \left(\varepsilon + \frac{1}{\mu} \right) \mathbf{F} - \frac{1}{2\eta_0} \left(\varepsilon - \frac{1}{\mu} \right) \mathbf{F}_v}.$$

É possível dar a esta relação constitutiva uma forma mais económica (e elegante) fazendo

$$\begin{cases} \cosh \xi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left(\varepsilon + \frac{1}{\mu} \right) = \frac{n_0^2 + 1}{2n_0} \\ \sinh \xi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left(\varepsilon - \frac{1}{\mu} \right) = \frac{n_0^2 - 1}{2n_0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cosh^2 \xi - \sinh^2 \xi = 1 \\ \cosh \xi + \sinh \xi = \exp(\xi) = \sqrt{\varepsilon \mu} = n_0 \end{cases}$$

onde $n_0 = \sqrt{\varepsilon \mu}$ é o índice de refração do meio, i.e.,

$$\boxed{\xi = \ln n_0}.$$

Nestas condições, infere-se que

$$\begin{cases} \eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \eta_0 \\ \mathbf{r}_v(\mathbf{F}) = \mathbf{F}_v = \mathbf{v}^{-1} \mathbf{F} \mathbf{v} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{G} = \frac{1}{2\eta_0} \left(\varepsilon + \frac{1}{\mu} \right) \mathbf{F} - \frac{1}{2\eta_0} \left(\varepsilon - \frac{1}{\mu} \right) \mathbf{F}_v \\ = \frac{1}{\eta} (\cosh \xi \mathbf{F} - \sinh \xi \mathbf{F}_v) \\ = \frac{1}{\eta} (\cosh \xi - r_v \sinh \xi) \mathbf{F} \\ = \frac{1}{\eta} \exp(-\xi r_v) \mathbf{F} \end{cases}$$

$$\boxed{\mathbf{G} = \frac{1}{\eta} \exp(-\xi r_v) \mathbf{F}}.$$

A simplicidade desta formulação algébrica está no modo como, agora, é possível passar – de forma imediata – do referencial próprio do meio para o referencial do laboratório onde todas as partículas do meio se deslocam com uma velocidade própria \mathbf{u} tal que

$$\boxed{\mathbf{U}_0 = \vec{u}_0 \wedge \mathbf{e}_0 = \vec{v}_0 \wedge \mathbf{f}_0} \rightarrow \boxed{\mathbf{u} = \exp(\zeta \mathbf{U}_0) \mathbf{v} = \gamma(\mathbf{v} + \vec{u})}.$$

Basta, portanto, ter com consideração que no referencial do laboratório se tem

$$\mathbf{v} = \gamma(\mathbf{u} + \vec{v}), \quad \mathbf{u} = c\mathbf{f}_0, \quad \vec{v} = c\beta\vec{v}_0, \quad (\vec{v}_0)^2 = -1.$$

Assim, a relação constitutiva mantém-se invariante: de $\mathbf{v} = c \mathbf{e}_0$ (no referencial próprio do meio) passa-se, apenas, para $\mathbf{v} = \gamma(\mathbf{u} + \vec{v})$ (no referencial do laboratório).

$$\boxed{\text{forma invariante da relação constitutiva no espaço-tempo}} \rightarrow \boxed{\mathbf{G} = \frac{1}{\eta} \exp(-\xi \mathbf{r}_v) \mathbf{F}}$$

$$\mathbf{r}_v(\mathbf{F}) = \mathbf{F}_v = \mathbf{v}^{-1} \mathbf{F} \mathbf{v}$$

$$\mathbf{v} = \exp(\zeta \mathbf{V}_0) \mathbf{u} \leftarrow \mathbf{V}_0 = \vec{v}_0 \mathbf{f}_0 = \vec{u}_0 \mathbf{e}_0 = \mathbf{U}_0$$

$$\therefore \mathbf{r}_v(\mathbf{F}) = \mathbf{F}_v = \mathbf{v}^{-1} \mathbf{F} \mathbf{v} = \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \mathbf{F} \mathbf{v}.$$

Nota: Os bivectores \mathbf{F} e \mathbf{G} descrevem a totalidade do campo electromagnético em qualquer referencial, i.e., são grandezas *covariantes*. Quando se escreve aquilo a que se chamou a forma local da relação constitutiva está-se, apenas, a escrever uma espécie de projecção dessa relação constitutiva num observador especial – o observador que está em repouso em relação ao meio (ou observador próprio do meio). A razão pela qual se qualifica a relação constitutiva como universal deve-se ao facto de relacionar grandezas covariantes entre si: é universal pois corresponde à forma *manifestamente covariante* da relação constitutiva do meio.

Depois de alguma manipulação algébrica é possível decompor a relação constitutiva $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathbf{F})$, do espaço-tempo de Minkowski, em duas relações constitutivas $\vec{D} = \vec{D}(\vec{E}, \vec{B})$ e $\vec{H} = \vec{H}(\vec{E}, \vec{B})$ entre vectores relativos. Vem então (no referencial do laboratório)

$$\boxed{\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c} = \beta \vec{v}_0} \rightarrow \begin{cases} \vec{D} = \frac{\gamma^2}{c^2 \mu} \left[(n_0^2 - \beta^2) \vec{E} + (n_0^2 - 1) (\vec{\beta} \cdot \vec{E}) \vec{\beta} + c (n_0^2 - 1) (\vec{\beta} \times \vec{B}) \right] \\ \vec{H} = \frac{\gamma^2}{c \mu} \left[(n_0^2 - 1) (\vec{\beta} \times \vec{E}) + c (1 - n_0^2 \beta^2) \vec{B} - c (n_0^2 - 1) (\vec{\beta} \cdot \vec{B}) \vec{\beta} \right] \end{cases}.$$

Estas relações constitutivas revelam que se trata de um *meio bianisotrópico*: tanto \vec{D} como \vec{H} dependem, simultaneamente, não só da intensidade do campo eléctrico \vec{E} mas também da intensidade do campo magnético \vec{B} . Por vezes estas relações são apresentadas numa forma diferente: apresentam-se como $\vec{D} = \vec{D}(\vec{E}, \vec{H})$ e $\vec{B} = \vec{B}(\vec{E}, \vec{H})$ (embora esta forma seja menos adequada quer ao significado destes vectores quer à própria formulação relativista). Adoptando esta escrita alternativa, tem-se então

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{1-\beta^2}{1-n_0^2\beta^2} \\ m = \frac{\beta(n_0^2-1)}{1-n_0^2\beta^2} \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \left[\alpha \vec{E} - (1-\alpha)(\vec{E} \cdot \vec{v}_0) \vec{v}_0 \right] + \frac{m}{c} (\vec{v}_0 \times \vec{H}) \\ \vec{B} = -\frac{m}{c} (\vec{v}_0 \times \vec{E}) + \mu_0 \mu \left[\alpha \vec{H} - (1-\alpha)(\vec{H} \cdot \vec{v}_0) \vec{v}_0 \right] \end{array} \right.$$

Conclusão: Um meio isotrópico (no seu referencial próprio) é considerado, no referencial do laboratório (onde é visto em movimento), como um meio bianisotrópico.

Tensores: Ainda hoje a linguagem tensorial é a mais usada quando se trata de estudar a electrodinâmica relativista. Vai-se agora mostrar de que forma é possível recuperar essa linguagem tensorial a partir da linguagem da álgebra geométrica. Começemos por notar que é sempre possível definir uma função $\mathbf{F}: \mathbb{R}^{1,3} \rightarrow \mathbb{R}^{1,3}$ anti-simétrica a partir de um bivector $\mathbf{F} \in \bigwedge^2 \mathbb{R}^{1,3} \subset \mathcal{Cl}_{1,3}$. Basta fazer

$$\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{1,3} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{F}(\mathbf{a}) = \mathbf{a} \lrcorner \mathbf{F} \in \mathbb{R}^{1,3} \\ \mathbf{G}(\mathbf{a}) = \mathbf{a} \lrcorner \mathbf{G} \in \mathbb{R}^{1,3} \end{array} \right.$$

Os tensores correspondentes obtêm-se, então, como segue

$$\alpha, \beta \in \{0, 1, 2, 3\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_{\alpha\beta} = \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{F}(\mathbf{e}_\beta) \rightarrow \text{tensor de Faraday} \\ G_{\alpha\beta} = \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{G}(\mathbf{e}_\beta) \rightarrow \text{tensor de Maxwell} \end{array} \right.$$

Na base $\mathcal{B} = \{ \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \}$ de $\mathbb{R}^{1,3}$, em que $\mathbf{e}_0^2 = 1$ e $\mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = \mathbf{e}_3^2 = -1$, as matrizes 4×4 anti-simétricas F e G que correspondem, respectivamente, aos tensores de Faraday e de Maxwell são dadas por

$$\text{tensores} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{tensor de Faraday} \rightarrow F = \begin{pmatrix} 0 & E_1/c & E_2/c & E_3/c \\ -E_1/c & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2/c & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3/c & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} \\ \text{tensor de Maxwell} \rightarrow G = \begin{pmatrix} 0 & D_1 & D_2 & D_3 \\ -D_1 & 0 & H_3/c & -H_2/c \\ -D_2 & -H_3/c & 0 & H_1/c \\ -D_3 & H_2/c & -H_1/c & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

■

A escrita invariante, em $Cl_{1,3}$, da relação constitutiva de um meio isotrópico na forma

$$\mathbf{G} = \frac{1}{\eta} \exp(-\xi r_v) \mathbf{F}$$

sugere algo que, de outra forma, seria difícil de prever: se se introduzir a transformação

$$\boxed{\text{redução à forma do vácuo}} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{F} = \exp\left(\frac{\xi}{2} r_v\right) \mathbf{F}' \\ \mathbf{G} = \exp\left(-\frac{\xi}{2} r_v\right) \mathbf{G}' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{F}' = \exp\left(-\frac{\xi}{2} r_v\right) \mathbf{F} \\ \mathbf{G}' = \exp\left(\frac{\xi}{2} r_v\right) \mathbf{G} \end{cases}$$

nessa relação constitutiva, obtém-se

$$\exp\left(-\frac{\xi}{2} r_v\right) \mathbf{G}' = \frac{1}{\eta} \exp(-\xi r_v) \exp\left(\frac{\xi}{2} r_v\right) \mathbf{F}'$$

$$\therefore \boxed{\mathbf{G}' = \frac{1}{\eta} \mathbf{F}'}$$

Conclusão importante: Aplicando a transformação indicada, em que $\mathbf{F} \mapsto \mathbf{F}'$ e $\mathbf{G} \mapsto \mathbf{G}'$, obtém-se uma relação constitutiva que tem a mesma forma que a relação constitutiva do vácuo. Por essa razão designou-se essa transformação por *redução à forma do vácuo*. Note-se porém que, ao proceder a esta transformação, se alterou a própria estrutura do espaço-tempo de Minkowski: esta nova relação, que tem a forma do vácuo, corresponde agora a um espaço-tempo fictício, novo, que já não é o espaço-tempo de Minkowski do problema original.

Coloca-se, então, a seguinte pergunta: qual é a forma das equações de Maxwell neste novo espaço-tempo fictício em que

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\} \mapsto \mathcal{B}' = \{\mathbf{f}'_0, \mathbf{f}'_1, \mathbf{f}'_2, \mathbf{f}'_3\}$$

$$\therefore \partial = \frac{1}{c} \mathbf{f}_0 \frac{\partial}{\partial t} - \nabla \mapsto \partial' = \frac{1}{c} \mathbf{f}'_0 \frac{\partial}{\partial t'} - \nabla' ?$$

Tem-se, neste novo espaço-tempo fictício,

$$\boxed{Cl_{1,3}} \rightarrow \begin{cases} \text{equação homogénea} & \rightarrow \partial' \wedge \mathbf{F}' = 0 \\ \text{equação não-homogénea} & \rightarrow \partial' \lrcorner \mathbf{G}' = \mathbf{J}' \end{cases}$$

mas, atendendo à nova relação constitutiva, vem simplesmente

$$\boxed{Cl_{1,3}} \rightarrow \begin{cases} \text{equação homogénea} & \rightarrow \partial' \wedge \mathbf{F}' = 0 \\ \text{equação não-homogénea} & \rightarrow \partial' \lrcorner \mathbf{F}' = \eta \mathbf{J}' \end{cases}$$

$$\therefore \partial' \wedge \mathbf{F}' + \partial' \lrcorner \mathbf{F}' = \eta \mathbf{J}' \Rightarrow \boxed{\partial' \mathbf{F}' = \eta \mathbf{J}'}$$

Note-se que a redução das duas equações de Maxwell a uma única equação, quando se está em presença do meio material, só foi possível devido à estrutura graduada da álgebra geométrica. Na ausência de fontes do campo, vem simplesmente

$$\boxed{\partial' \mathbf{F}' = 0}$$

Para ondas planas e monocromáticas da forma

$$\mathbf{F}' = \Re \left\{ \mathbf{F}'_0 \exp[i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}')] \right\}$$

obtém-se

$$\mathbf{k}' \mathbf{F}'_0 = 0 \Rightarrow (\mathbf{k}')^2 \mathbf{F}'_0 = 0.$$

Logo, para soluções não triviais do campo, deverá então ser

$$\boxed{(\mathbf{k}')^2 = 0}$$

Mas, por outro lado, é (Apêndice E)

$$\mathbf{k}' = \exp\left(\frac{\xi}{2} \mathbf{r}_v\right) \mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{k}' = \cosh\left(\frac{\xi}{2}\right) \mathbf{k} + \sinh\left(\frac{\xi}{2}\right) \mathbf{k}_v$$

$$\therefore \begin{cases} \cosh\left(\frac{\xi}{2}\right) = \sqrt{\frac{\cosh \xi + 1}{2}} = \frac{n_0 + 1}{2\sqrt{n_0}} \\ \sinh\left(\frac{\xi}{2}\right) = \sqrt{\frac{\cosh \xi - 1}{2}} = \frac{n_0 - 1}{2\sqrt{n_0}} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\mathbf{k}' = \frac{1}{2\sqrt{n_0}} [(n_0 + 1)\mathbf{k} + (n_0 - 1)\mathbf{k}_v]}$$

Assim, vem

$$\boxed{(\mathbf{k}')^2 = 0} \Rightarrow \boxed{(n_0 + 1)^2 \mathbf{k}^2 + (n_0 - 1)^2 \mathbf{k}_v^2 + 2(n_0^2 - 1)(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_v) = 0}$$

$$\begin{array}{l} \boxed{\mathbf{v}^2 = \mathbf{v} \mathbf{v} = c^2} \\ \Downarrow \\ \boxed{\mathbf{v}^{-1} = \frac{1}{c^2} \mathbf{v}} \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} \mathbf{k}_v = \mathbf{r}_v(\mathbf{k}) = \mathbf{v}^{-1} \mathbf{k} \mathbf{v} = \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \mathbf{k} \mathbf{v} \\ = \frac{1}{c^2} \mathbf{v}(\mathbf{k} \mathbf{v}) = \frac{1}{c^2} \mathbf{v}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{k} \wedge \mathbf{v}) \\ = \frac{1}{c^2} [(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} + \mathbf{v} \lrcorner (\mathbf{k} \wedge \mathbf{v})] \\ = \frac{1}{c^2} [(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{k}] \\ = \frac{2}{c^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{v} - \mathbf{k} \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{k}'_v = (\mathbf{v}^{-1} \mathbf{k} \mathbf{v})(\mathbf{v}^{-1} \mathbf{k} \mathbf{v}) = \mathbf{k}^2 \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}'_v = \frac{2}{c^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{k})^2 - \mathbf{k}^2 \end{array} \right.$$

$$\therefore \boxed{(\mathbf{k}')^2 = 0} \Rightarrow \boxed{\mathbf{k}^2 + \frac{1}{c^2} (n_0^2 - 1) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{k})^2 = 0}.$$

Nota: Tem-se $r_v^2 = 1$. Com efeito, se $v \in Cl_{1,3}$ é um multivector da álgebra, então

$$r_v(u) = r_v[r_u(u)] = \mathbf{v}^{-1} (\mathbf{v}^{-1} u \mathbf{v}) \mathbf{v} = \frac{1}{c^4} [\mathbf{v} (\mathbf{v} u \mathbf{v}) \mathbf{v}] = \frac{\mathbf{v}^4}{c^4} u = u.$$

Por essa razão é que

$$\exp(\xi r_v) = \cosh \xi + r_v \sinh \xi.$$

Notando, então, que

$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{v} = \gamma c (\mathbf{f}_0 + \vec{\beta}) \\ \mathbf{k} = k_0 (\mathbf{f}_0 + \vec{n}) \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \mathbf{k}^2 = k_0^2 (1 - n^2) \\ (\mathbf{v} \cdot \mathbf{k})^2 = \gamma^2 c^2 k_0^2 (1 + \vec{\beta} \cdot \vec{n})^2 \end{array} \right.$$

infere-se ainda

$$\boxed{\theta = \angle(\vec{\beta}, \vec{n})} \rightarrow \vec{\beta} \cdot \vec{n} = -\beta n \cos \theta$$

$$\therefore (\beta^2 \Omega \cos^2 \theta - 1) n^2 - 2\beta \Omega \cos \theta n + (1 + \Omega) = 0$$

onde se introduziu

$$\boxed{\Omega = \gamma^2 (n_0^2 - 1)}.$$

As duas soluções desta equação quadrática em n são dadas por

$$n = \frac{\beta \Omega \cos \theta \pm \sqrt{1 + \Omega (1 - \beta^2 \cos^2 \theta)}}{\beta^2 \Omega \cos^2 \theta - 1}.$$

Nota: As duas soluções desta equação não são independentes. Com se tem

$$n_+(\pi - \theta) = -n_-(\theta)$$

as duas soluções correspondem, de facto, a uma única solução.

O sinal negativo antes da raiz quadrada tem de ser escolhido por forma a obter o resultado $n = n_0$ quando $\beta = 0$. Ou seja, tem-se finalmente

$$\boxed{\text{índice de refração efectivo do meio no referencial do laboratório}} \rightarrow \boxed{n(\theta) = \frac{\sqrt{1 + \Omega(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)} - \beta \Omega \cos \theta}{1 - \beta^2 \Omega \cos^2 \theta}}.$$

Assim, vem

$$\left| \begin{array}{l} a = 1 + \Omega(1 - \beta^2 \cos^2 \theta) \\ b = \beta \Omega \cos \theta \end{array} \right. \rightarrow \frac{1}{n(\theta)} = \frac{1}{1 + \Omega} \frac{a - b^2}{\sqrt{a - b}} = \frac{1}{1 + \Omega} \frac{(\sqrt{a} + b)(\sqrt{a} - b)}{\sqrt{a} - b} = \frac{\sqrt{a} + b}{1 + \Omega}$$

$$\therefore \boxed{\text{velocidade de fase normalizada}} \rightarrow \boxed{\frac{v_p(\theta)}{c} = \frac{\sqrt{1 + \Omega(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)} + \beta \Omega \cos \theta}{1 + \Omega}}.$$

Nas figuras anexas (páginas 89 e 90) representa-se a variação de v_p/c em função do ângulo θ em diagramas polares para diferentes valores de β . Existem dois casos extremos: (i) $\beta = 0$; (ii) $\beta = 1$. No primeiro caso, tem-se

$$\beta = 0 \rightarrow \frac{v_p(\theta)}{c} = \frac{1}{n_0}$$

recuperando-se, deste modo, a situação estacionária. No segundo caso, obtém-se ($\Omega \rightarrow \infty$)

$$\beta = 1 \rightarrow \frac{v_p(\theta)}{c} = \cos \theta$$

e corresponde a uma esfera – tal como o caso precedente. Quando se tem $\beta = 1/n_0$ a velocidade do meio (em relação ao laboratório) tem o mesmo valor que a velocidade de fase da onda no referencial próprio do meio $v_p = c/n_0$ e vem ($\Omega = n_0^2$)

$$\beta = \frac{1}{n_0} \rightarrow \frac{v_p(\theta)}{c} = \frac{\sqrt{n_0^2 + \sin^2 \theta} + n_0 \cos \theta}{1 + n_0^2}$$

tendo-se, em particular,

$$v_p(\pi) = 0.$$

Este caso corresponde ao exemplo numérico em que $n_0 = 4$ e $\beta = 0.25$. Para $\beta > 1/n_0$, a zona de Čerenkov, a velocidade do meio excede a velocidade de fase da onda no referencial próprio do meio e tem início um efeito novo: passa a existir uma superfície de velocidade de fase (ou superfície normal) dupla que se auto-intersecta na origem – é o caso, no exemplo

numérico ilustrado, em que $n_0 = 4$ e $\beta = 0.75$. Na origem a superfície normal é tangente a um cone cujo semi-ângulo é θ_0 tal que

$$\tan \theta_0 = \pm \sqrt{\frac{\beta^2 n_0^2 - 1}{1 - \beta^2}}.$$

No exemplo numérico ilustrado é $\theta_0 \approx 87^\circ$. Para direcções dentro deste cone existem dois valores da velocidade de fase que são ambos positivos. Porém, para direcções fora deste cone, os dois valores da velocidade de fase têm sinais opostos.

Comentário importante: No vácuo (propriamente dito) e para ondas planas e monocromáticas, tem-se então

$$\begin{cases} \mathbf{k} \wedge \mathbf{F} = 0 \\ \mathbf{k} \lrcorner \mathbf{G} = 0 \end{cases}.$$

Como, por outro lado, se tem

$$\text{vácuo} \rightarrow \mathbf{G} = \frac{1}{\eta_0} \mathbf{F}$$

infere-se que

$$\begin{cases} \mathbf{k} \wedge \mathbf{F} = 0 \\ \mathbf{k} \lrcorner \mathbf{F} = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{k} \mathbf{F} = \mathbf{k} \wedge \mathbf{F} + \mathbf{k} \lrcorner \mathbf{F} = 0.$$

Por essa razão é que, no vácuo, $\mathbf{k}^2 = 0$, i.e., os fotões têm massa nula. Com efeito, vem sucessivamente (para soluções não triviais em que $\mathbf{F} \neq 0$)

$$\mathbf{k} \mathbf{F} = 0 \Rightarrow \mathbf{k} (\mathbf{k} \mathbf{F}) = 0 \Rightarrow \mathbf{k}^2 \mathbf{F} = 0 \Rightarrow \mathbf{k}^2 = 0.$$

Logo, vem ainda

$$k_0 = \frac{\omega}{c} \rightarrow \mathbf{k} = k_0 (\mathbf{e}_0 + \vec{n})$$

$$\therefore \mathbf{k}^2 = k_0^2 [\mathbf{e}_0^2 + (\vec{n})^2 + 2(\mathbf{e}_0 \cdot \vec{n})] = k_0^2 [1 + (\vec{n})^2] = 0 \Rightarrow \boxed{(\vec{n})^2 = -1}.$$

Ou seja: o índice de refração do vácuo é $n = 1$ pois

$$(\vec{n}_0)^2 = -1 \Rightarrow \vec{n} = n \vec{n}_0 \Rightarrow (\vec{n})^2 = n^2 (\vec{n}_0)^2 = -1 \Rightarrow \boxed{n^2 = 1}.$$

Pelo dualismo onda-corpúsculo de de Broglie, é então efectivamente

$$\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k} = \frac{\hbar \omega}{c} (\mathbf{e}_0 + \vec{n}) \Rightarrow \mathbf{p}^2 = \left(\frac{\hbar \omega}{c} \right)^2 (\mathbf{e}_0 + \vec{n})^2 = 0$$

$$\mathbf{p} = m \mathbf{u} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{p}^2 = m^2 \mathbf{u}^2 = m^2 c^2 = 0$$

$$\therefore \text{ massa dos fotões } \rightarrow \boxed{m=0}.$$

Por outro lado, tem-se ainda

$$\mathbf{F} = \Re \left\{ \mathbf{F}_0 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] \right\}$$

$$\mathbf{k} \mathbf{F}_0 = 0.$$

Assim, é possível escolher um vector $\mathbf{m} \neq 0$, tal que $\mathbf{k} \cdot \mathbf{m} = 0$, de forma a ter-se

$$\boxed{\mathbf{F}_0 = \mathbf{k} \mathbf{m} = \mathbf{k} \wedge \mathbf{m}}.$$

De facto, tem-se

$$\boxed{\mathbf{k}^2 = 0} \Rightarrow \mathbf{k} \mathbf{F}_0 = \mathbf{k} (\mathbf{k} \mathbf{m}) = \mathbf{k}^2 \mathbf{m} = 0.$$

Note-se, também, que

$$\lambda \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{k} (\mathbf{m} + \lambda \mathbf{k}) = \mathbf{k} \mathbf{m} + \lambda \mathbf{k}^2 = \mathbf{k} \mathbf{m} = \mathbf{k} \wedge \mathbf{m}.$$

É esta liberdade na definição do vector \mathbf{m} que permite escolher $\mathbf{k} \cdot \mathbf{m} = 0$ pois $\mathbf{m}_{\parallel} = \lambda \mathbf{k}$ e esta escolha corresponde a fazer $\lambda = 0$. Finalmente, verifica-se que \mathbf{F}_0 é um bivector *parabólico* já que

$$\mathbf{F}_0^2 = (\mathbf{k} \wedge \mathbf{m})^2 = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{m})^2 - \mathbf{k}^2 \mathbf{m}^2 = 0.$$

■

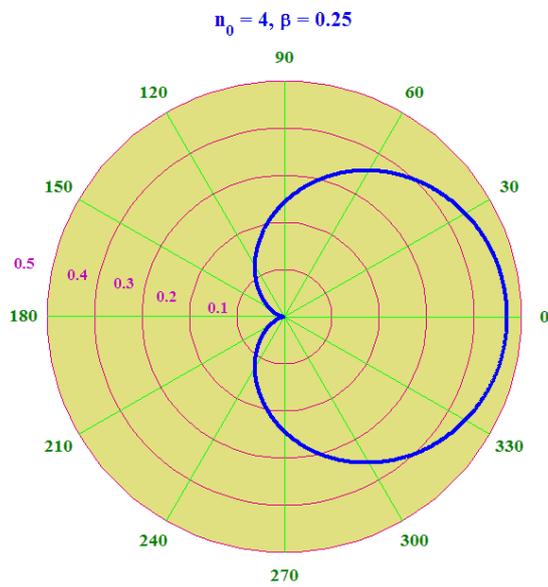
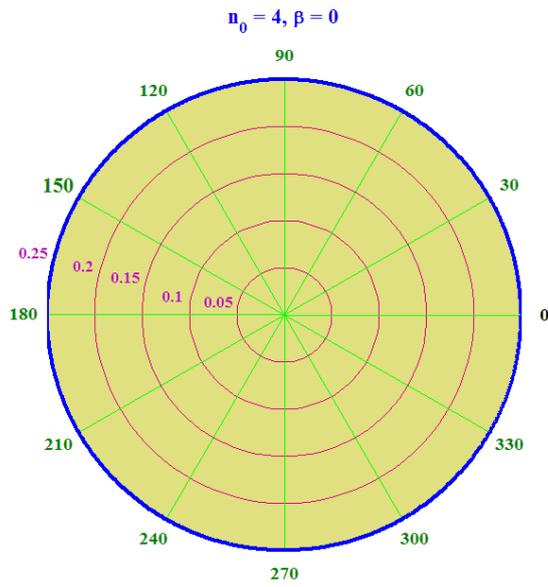
Todas estas considerações sobre o vácuo aplicam-se *mutatis mutandis* ao espaço-tempo fictício que tem a *forma* do vácuo (i.e, cuja relação constitutiva tem essa forma) e onde

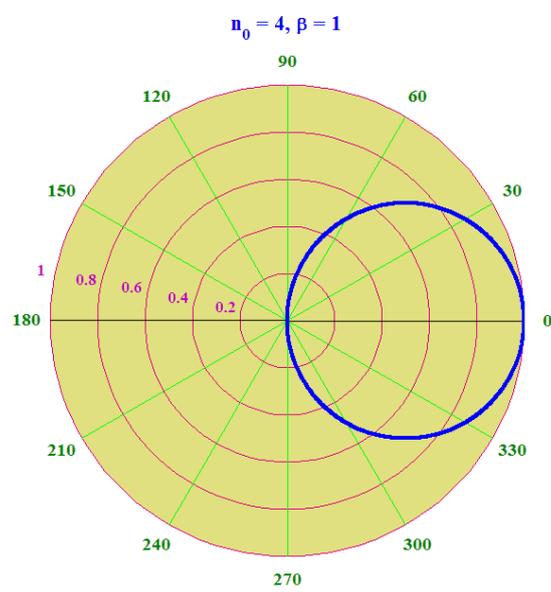
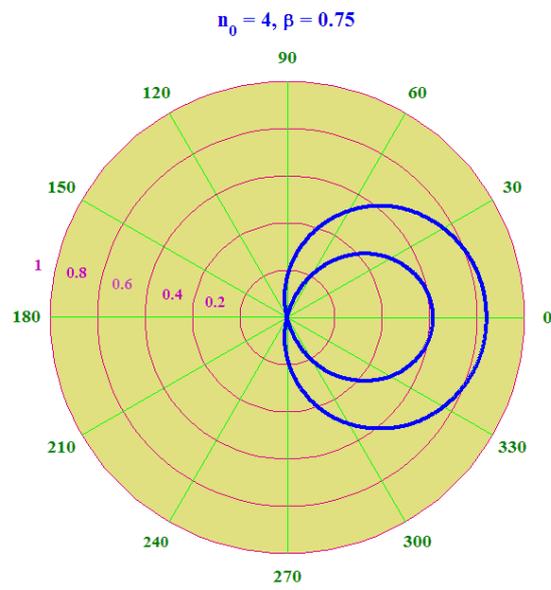
$$\boxed{\text{espaço-tempo fictício com a forma do vácuo}} \rightarrow \mathbf{G}' = \frac{1}{\eta} \mathbf{F}'.$$

Assim, tem-se

$$(\mathbf{k}')^2 = 0, \quad \mathbf{F}'_0 = \mathbf{k}' \wedge \mathbf{m}', \quad (\mathbf{F}'_0)^2 = 0$$

pelo que, também, \mathbf{F}'_0 é parabólico e os fotões neste espaço-tempo fictício têm massa nula.





Notas adicionais: Os resultados apresentados nesta secção não são novos. Apenas a abordagem que utiliza a álgebra geométrica $Cl_{1,3}$ é que é nova – à excepção de uma abordagem semelhante (mas não idêntica) da formulação covariante da relação constitutiva de um meio isotrópico que apareceu, pela primeira vez, em

📖 P. Puska, “Covariant isotropic constitutive relations in Clifford’s geometric algebra,” *Progress in Electromagnetics Research*, PIER 22, pp. 413-428, 2001.

O estudo dos meios em movimento é, com efeito, um tópico já clássico da formulação relativista da electrodinâmica clássica. Veja-se, e.g., o Capítulo 17 da nova edição do excelente livro de Bladel:

📖 Jean Van Bladel, *Electromagnetic Fields*. Piscataway, NJ: IEEE Press and Wiley, 2nd ed., 2007.

Os principais resultados desta secção, usando embora a formulação diádica clássica, podem ser encontrados nos seguintes livros:

📖 Hollis C. Chen, *Theory of Electromagnetic Waves: A Coordinate-Free Approach*. New York: McGraw-Hill, 1985 (Chapter 8: pp. 299-399)

📖 Jin Au Kong, *Electromagnetic Wave Theory*. Cambridge, MA: EMW Publishing, 2005 (Chapter 7: pp. 879-952).

O conceito de meio bianisotrópico foi introduzido por Jin Au Kong (1942-2008) – recentemente falecido, no dia 13 de Março de 2008, aos 65 anos – na sua tese de doutoramento de 1965 (*Syracuse University*) como se explica em:

📖 Jin Au Kong, *Maxwell Equations*. Cambridge, MA: EMW Publishing, 2002 (p. 47).

Veja-se, ainda,

 David K. Cheng and Jin A. Kong, “Covariant descriptions of bianisotropic media,” *Proceedings of the IEEE*, Vol. 56, No. 3, pp. 248-251, March 1968.

Outros trabalhos publicados pelo Autor em colaboração com os seus alunos de doutoramento e ainda com o Prof. Afonso Barbosa abordam a óptica relativista em meios em movimento – nomeadamente o efeito Doppler e a aberração:

 Carlos R. Paiva and Marco A. Ribeiro, “Doppler shift from a composition of boosts with Thomas rotation: a spacetime algebra approach,” *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, Vol. 20, No. 7, pp. 941-953, 2006

 Sérgio A. Matos, João R. Canto, Carlos R. Paiva, and Afonso M. Barbosa, “Complex aberration effect in moving dispersive DNG media: a spacetime algebra approach,” *PIERS Online*, Vol. 4, No. 6, pp. 611-614, 2008.

Nota final: O estudo, aqui apresentado nesta secção, é um caso particular de um estudo mais geral desenvolvido pelo Autor em colaboração com um dos seus alunos de doutoramento, Marco Alexandre Ribeiro:

 Marco A. Ribeiro and Carlos R. Paiva, “An equivalence principle for electromagnetics through Clifford’s geometric algebras,” *Metamaterials*, Vol. 2, pp. 77-91, March 2008.

 Marco A. Ribeiro and Carlos R. Paiva, “Transformation and moving media: a unified approach using geometric algebra,” pp. 63-74, chapter in: Saïd Zoudhi, Ari Sihvola, and Alexey P. Vinogradov, Eds., *Metamaterials and Plasmonics: Fundamentals, Modelling, Applications* (in press). Berlin: Springer-Verlag, 2009.



4. Epílogo: Conclusão e notas finais

Nesta lição vários temas aparentemente desconexos foram tratados. A álgebra geométrica desempenhou o papel de fio de Ariadne – a linha estruturante, a linguagem matemática unificadora a partir da qual todos os assuntos foram desenvolvidos. Mas esse é apenas o lado mais formal desta lição. Existe, ainda, um tema único que atravessa, nas suas diferentes variações, esta lição: o estudo dos meios materiais no âmbito da electrodinâmica clássica. Numa primeira parte apresentou-se uma nova abordagem dos meios anisotrópicos através do exemplo paradigmático dos cristais não-magnéticos – nomeadamente através do caso uniaxial. Numa segunda parte apresentou-se uma nova abordagem dos meios em movimento no contexto do espaço-tempo de Minkowski da relatividade restrita. Em ambos os casos a álgebra geométrica permitiu uma perspectiva matemática genuinamente geométrica – no sentido em que toda a análise radicou numa formulação na sua forma mais geral por intermédio de uma linguagem independente de qualquer sistema particular de coordenadas. Mas, é claro, em cada problema concreto há que traduzir essa formulação geométrica em sistemas de coordenadas bem determinados. É aqui que a flexibilidade e a fecundidade da álgebra geométrica se revelam: através da álgebra geométrica facilmente se passa das expressões gerais, de carácter global, para a sua projecção em qualquer referencial local.

No caso da álgebra geométrica do espaço ordinário tridimensional, com métrica euclidiana, a álgebra Cl_3 revela-se tão ou mais eficiente que a álgebra vectorial usual baseada no produto externo de Gibbs. Ao contrário da álgebra de Gibbs, a álgebra geométrica é associativa – o que permite, caso seja necessário, reduzir as principais manipulações algébricas ao cálculo das suas imagem matriciais. Com efeito, existe um isomorfismo entre Cl_3 e $\mathbb{C}(2) = \text{Mat}(2, \mathbb{C})$, i.e., a álgebra das matrizes 2×2 definidas sobre o corpo \mathbb{C} dos números complexos: $Cl_3 \simeq \mathbb{C}(2)$. Para o provar basta notar que se pode estabelecer a correspondência $\mathbf{e}_i \simeq \sigma_i$ com $i \in \{1, 2, 3\}$, onde $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ é uma base de \mathbb{R}^3 e $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ representam as matrizes de Pauli da mecânica quântica, i.e.,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

De facto, verifica-se que (I é a matriz identidade de segunda ordem)

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = I \\ \sigma_1 \sigma_2 = i \sigma_3 = -\sigma_2 \sigma_1 \\ \sigma_3 \sigma_1 = i \sigma_2 = -\sigma_1 \sigma_3 \\ \sigma_2 \sigma_3 = i \sigma_1 = -\sigma_3 \sigma_2 \end{array} \right.$$

Note-se, contudo, que a álgebra geométrica tem uma estrutura mais rica do que qualquer álgebra matricial: (i) um vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ tem uma imagem na forma de uma matriz mas a operação fundadora do produto geométrico, que produz o número real (positivo, no caso de Cl_3) $\mathbf{a}^2 = \mathbf{a}\mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$, não encontra paralelo na álgebra matricial isomorfa; (ii) o subespaço \mathbb{R}^3 (dos vectores) em Cl_3 é um subespaço privilegiado e que não encontra uma imagem matricial apropriada.

A álgebra geométrica $Cl_{1,3}$ adoptada para o espaço-tempo de Minkowski – correspondente ao espaço quadrático $\mathbb{R}^{1,3}$ com uma base $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ tal que $\mathbf{e}_0^2 = 1$ e $\mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = \mathbf{e}_3^2 = -1$ – revela-se, por seu turno, um instrumento matemático poderoso para a física da relatividade restrita. Além disso, ao contrário da álgebra tensorial, a álgebra $Cl_{1,3}$ é completamente livre de qualquer ginástica de índices tornando, deste modo, perfeitamente evidente a natureza manifestamente covariante das equações. Neste caso, também é possível estabelecer um isomorfismo com uma álgebra matricial. Com efeito, tem-se $Cl_{1,3} \cong \mathbb{H}(2)$ onde $\mathbb{H}(2) = \text{Mat}(2, \mathbb{H})$ representa a álgebra das matrizes 2×2 definidas sobre o anel de divisão \mathbb{H} dos quaterniões de Hamilton. Outro isomorfismo, talvez mais facilmente acessível a quem não domina a álgebra dos quaterniões, é o seguinte: $Cl_{1,3} \cong \mathbb{C}(4) = \text{Mat}(4, \mathbb{C})$. Neste caso – o da álgebra das matrizes 4×4 definidas sobre o corpo \mathbb{C} – a base corresponde às matrizes de Dirac da mecânica quântica. Tem-se, efectivamente, $\mathbf{e}_\alpha \cong \gamma_\alpha$ com $\alpha \in \{0, 1, 2, 3\}$ e em que

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Facilmente se verificam as relações

$$\left| \begin{array}{l} \gamma_0^2 = I, \quad \gamma_1^2 = \gamma_2^2 = \gamma_3^2 = -I \\ \alpha \neq \beta \quad \rightarrow \quad \gamma_\alpha \gamma_\beta = -\gamma_\beta \gamma_\alpha \end{array} \right.$$

em que I é, agora, a matriz identidade de quarta ordem.

■

Muitos dos resultados aqui apresentados já foram apresentados na literatura – nomeadamente através de publicações do Autor em co-autoria com alguns dos seus alunos de doutoramento:

- [1] Sérgio A. Matos, Marco A. Ribeiro, and Carlos R. Paiva, “Anisotropy without tensors: a novel approach using geometric algebra,” *Optics Express*, Vol. 15, No. 23, pp. 15175-15186, November 2007
- [2] Carlos R. Paiva and Marco A. Ribeiro, “Doppler shift from a composition of boosts with Thomas rotation: a spacetime algebra approach,” *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, Vol. 20, No. 7, pp. 941-953, 2006
- [3] Marco A. Ribeiro and Carlos R. Paiva, “An equivalence principle for electromagnetics through Clifford’s geometric algebras,” *Metamaterials*, Vol. 2, pp. 77-91, March 2008
- [4] Marco A. Ribeiro and Carlos R. Paiva, “Transformation and moving media: a unified approach using geometric algebra,” pp. 63-74, chapter in: Saïd Zoudhi, Ari Sihvola, and Alexey P. Vinogradov, Eds., *Metamaterials and Plasmonics: Fundamentals, Modelling, Applications* (in press). Berlin: Springer-Verlag, 2009.

O material desta lição relacionado com os meios anisotrópicos encontra um tratamento mais geral (o caso biaxial) em [1]. A álgebra do espaço-tempo de Minkowski foi analisada em [2] tendo em vista, embora, o caso específico do efeito Doppler relativista. Os meios em movimento, embora num contexto mais geral, foram abordados em [3] e [4]. A ideia da relação constitutiva covariante de um meio isotrópico em movimento baseou-se, contudo, no seguinte trabalho (com algumas adaptações):

📖 P. Puska, “Covariant isotropic constitutive relations in Clifford’s geometric algebra,” *Progress in Electromagnetics Research*, PIER 22, pp. 413-428, 2001.

Deve finalmente referir-se que, no que respeita à introdução da álgebra geométrica, não era possível passar ao lado daquela obra que o Autor considera, do ponto de vista pedagógico, um trabalho notável (da autoria de um matemático que, infelizmente, morreu prematuramente):

📖 Pertti Lounesto, *Clifford Algebras and Spinors*. Cambridge: Cambridge University Press, 2nd ed., 2001.

■

Uma parte substancial desta lição tem a ver com as várias formulações das equações de Maxwell – quer em Cl_3 quer em $Cl_{1,3}$. Em relação a este assunto é necessária uma nota final. Do ponto de vista do Autor a forma mais geral de escrever as equações de Maxwell não é a que foi adoptada no âmbito da álgebra $Cl_{1,3}$. Existe, ainda, uma forma mais geral e que foi apresentada em [3]. Trata-se da formulação das equações de Maxwell de forma independente de qualquer métrica e que utiliza a linguagem matemática das formas diferenciais. Esta abordagem foi magistralmente desenvolvida na seguinte obra:

📖 Friedrich W. Hehl and Yuri N. Obukhov, *Foundations of Classical Electrodynamics: Charge, Flux, and Metric*. Boston: Birkhäuser, 2003.

Neste livro começa-se por apresentar uma electrodinâmica pré-métrica – uma teoria incompleta mas onde as duas equações de Maxwell são formuladas sem invocar qualquer estrutura métrica. A vantagem desta metodologia é a seguinte: as equações de Maxwell assim formuladas são utilizáveis, sem qualquer alteração, em qualquer contexto métrico – e.g., tanto no espaço-tempo plano de Minkowski da relatividade restrita (métrica rígida) como no espaço-tempo curvo (com ou sem torção) de Riemann da relatividade geral (métrica flexível). Só quando se estabelece uma relação constitutiva, que liga as duas equações de Maxwell, no espaço-tempo é que a métrica faz a sua aparição. Esta formulação é compatível não só com o grupo de Lorentz mas também com possíveis violações dessa estrutura. A única restrição importante é a suposição de que não existem monopolos magnéticos.

■

A discussão da relatividade euclidiana, aqui incluída, inspirou-se na ideia avançada por vários autores de que o segundo postulado de Einstein sobre a velocidade da luz não é necessário para a construção da teoria da relatividade restrita – o que até, do ponto de vista epistemológico, faz sentido. Com efeito, é pouco razoável que uma teoria universal, aplicável a todas as interações (electromagnética, nuclear forte e nuclear fraca) com a única excepção da interacção gravitacional, tenha de ter um postulado retirado da electrodinâmica. Apresenta-se, de seguida, uma lista de trabalhos representativa desta visão:

- 📖 A. R. Lee and T. M. Kalotas, “Lorentz transformations from the first postulate,” *American Journal of Physics*, Vol. 43, No. 5, pp. 434-437, May 1975
- 📖 Jean-Marc Lévy-Leblond, “One more derivation of the Lorentz transformation,” *American Journal of Physics*, Vol. 44, No. 3, pp. 271-277, March 1976
- 📖 N. David Mermin, “Relativity without light,” *American Journal of Physics*, Vol. 52, No. 2, pp. 119-124, February 1984.



De acordo com David Hestenes as formas diferenciais são desnecessárias uma vez que podem ser substituídas facilmente no âmbito da álgebra geométrica. Hestenes vai ao ponto de defender que a distinção entre um dado espaço tangente e o seu dual (o espaço cotangente) é desnecessária. Neste lógica, a teoria dos fibrados é também considerada um excesso supérfluo de formalismo.

“A huge literature has arisen in recent years combining differential forms with Clifford algebras and the Dirac operator. By failing to understand how all these things fit together in a unified Geometric Calculus, this literature is burdened by a gross excess of formalism, which, when stripped away, reveals much of it as trivial.”

David Hestenes, “Differential forms in geometric calculus,” in: F. Brackx, et al., Eds., *Clifford Algebras and Their Application in Mathematical Physics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993 (pp. 269-285)

Neste ponto o Autor discorda de Hestenes: como se mostra em [3], o conceito de fibrado pode ser muito útil – mesmo em electrodinâmica clássica, e.g., quando existe a necessidade de clarificar a distinção entre as equações de Maxwell, escritas de forma independente de qualquer métrica (numa variedade diferenciável nua, i.e., sem métrica), e as várias estruturas métricas que têm de ser analisadas (na linha do livro, já referenciado, de Hehl e Obukhov). Note-se a utilidade das equações de Maxwell assim escritas: elas são válidas na classe geral de difeomorfismos de \mathbb{R}^4 , i.e., é possível deformar a variedade sem alterar a forma das equações de Maxwell (apenas a relação constitutiva do espaço-tempo é que reflecte essas deformações). Mostra-se em [3] como uma álgebra geométrica de formas (como secções transversais do fibrado cotangente) – a par com uma álgebra geométrica de vectores (como secções transversais do fibrado tangente) – pode ser um instrumento muito útil, e.g., no estudo dos metamateriais usados como «mantos de invisibilidade» (*invisibility cloakings*) onde é fundamental estabelecer uma equivalência entre as chamadas interpretações topológica (métrica flexível) e material (métrica rígida).

■

Uma última nota acerca das contracções à esquerda e à direita. Vários autores, incluindo Hestenes, não introduzem estas duas operações. Em vez delas introduzem uma espécie de «produto interno» generalizado

$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{a} \in \bigwedge^j V \\ \mathbf{b} \in \bigwedge^k V \end{array} \right. \rightarrow \boxed{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \langle \mathbf{a} \mathbf{b} \rangle_{|j-k|}}$$

onde \mathbf{a} e \mathbf{b} são multivectores homogêneos de graus j e k (respectivamente). Como mostra Pertti Lounesto, tal «definição» é injustificada. Vejam-se, com efeito, as seguintes referências:

- 📖 Pertti Lounesto, *Clifford Algebras and Spinors*. Cambridge: Cambridge University Press, 2nd ed., 2001 (pp. 290-291)
- 📖 Leo Dorst, Daniel Fontijne, and Stephen Mann, *Geometric Algebra for Computer Science*. San Francisco, CA: Morgan Kaufmann Publishers, 2007 (Appendix B: Contractions and other inner products, pp. 589-596)
- 📖 Leo Dorst, “The inner products of geometric algebra,” pp. 35-46, in: J. Lasenby, L. Dorst, and C. Doran, Editors, *Applications of Geometric Algebra in Computer Science and Engineering*. Boston: Birkhäuser, 2002.



Bibliografia

Apresenta-se, a seguir, uma pequena lista de referências bibliográficas gerais sobre álgebra geométrica e sobre as suas variadas aplicações – em matemática, em física e em engenharia. Não se trata, portanto, de uma lista com pretensões de incluir toda a literatura sobre este assunto: apenas se incluem os trabalhos que o Autor considera mais importantes para o neófito da álgebra geométrica.

Álgebra Geométrica: Artigos

- 📖 Stephen Gull, Anthony Lasenby, and Chris Doran, “Imaginary numbers are not real – the geometric algebra of spacetime,” *Foundations of Physics*, Vol. 23, No. 9, pp. 1175-1201, September 1993
- 📖 David Hestenes, “Oersted Medal Lecture 2002: Reforming the mathematical language of physics,” *American Journal of Physics*, Vol. 71, No. 2, pp. 104-121, February 2003
- 📖 David Hestenes, “Spacetime physics with geometric algebra,” *American Journal of Physics*, Vol. 71, No. 7, pp. 691-714, July 2003

Sítios da Internet sobre álgebra geométrica (21 de Setembro de 2008)

http://modelingnts.la.asu.edu/GC_R&D.html

<http://www.mrao.cam.ac.uk/~clifford/>

<http://www.science.uva.nl/ga/>

Álgebra Geométrica: Livros

-  Pertti Lounesto, *Clifford Algebras and Spinors*. Cambridge: Cambridge University Press, 2nd ed., 2001
-  David Hestenes, *New Foundations for Classical Mechanics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2nd ed., 1999
-  Chris Doran and Anthony Lasenby, *Geometric Algebra for Physicists*. Cambridge: Cambridge University Press, 2003
-  Leo Dorst, Daniel Fontijne, and Stephen Mann, *Geometric Algebra for Computer Science*. San Francisco, CA: Morgan Kaufmann Publishers, Elsevier, 2007
-  Rafał Abłamowicz and Garret Sobczyk, *Lectures on Clifford (Geometric) Algebras and Applications*. Boston: Birkhäuser, 2004
-  William E. Baylis, Editor, *Clifford (Geometric) Algebras: With Applications in Physics, Mathematics, and Engineering*. Boston: Birkhäuser, 1996
-  David Hestenes and Garret Sobczyk, *Clifford Algebra to Geometric Calculus: A Unified Language for Mathematics and Physics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1984.



Apêndice A

Invertibilidade do Produto Geométrico

A invertibilidade do produto geométrico tem uma clara interpretação geométrica. Suponhamos, em tudo o que se segue, que o vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ é um vector conhecido. Consideremos, em primeiro lugar, que também se conhece o escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{r} \cdot \mathbf{a} = \alpha$, sendo \mathbf{r} um vector qualquer desde que satisfaça esta equação. Então, fazendo $\alpha = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$, vem ainda $(\mathbf{r} - \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = 0$. Facilmente se verifica que o afixo dos possíveis vectores \mathbf{r} que observam esta equação se encontra no plano π (visto de perfil) na Fig. A1. Isto significa que o vector \mathbf{r} , tal que $\mathbf{r} \cdot \mathbf{a} = \alpha$, não fica caracterizado univocamente: qualquer ponto em π é solução deste primeiro problema.

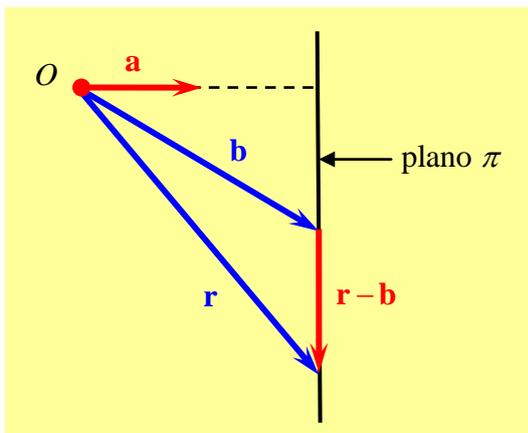
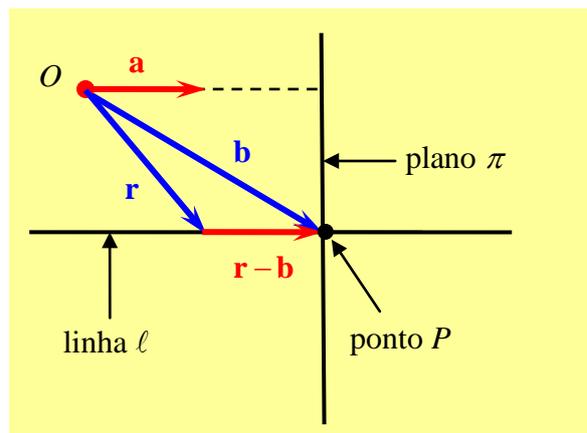


Figura A1 O plano π é o lugar geométrico dos afixos dos vectores \mathbf{r} tais que $\mathbf{r} \cdot \mathbf{a} = \alpha$, i.e., tais que $(\mathbf{r} - \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = 0$ em que se introduziu um vector \mathbf{b} com $\alpha = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

Consideremos, em segundo lugar, que (além do vector \mathbf{a}) se conhece o bivector $\mathbf{B} \in \bigwedge^2 \mathbb{R}^3$ tal que $\mathbf{r} \wedge \mathbf{a} = \mathbf{B}$, sendo \mathbf{r} um vector qualquer desde que satisfaça esta equação. Então, fazendo $\mathbf{B} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$, vem ainda $(\mathbf{r} - \mathbf{b}) \wedge \mathbf{a} = 0$. Facilmente se verifica que o afixo dos possíveis vectores \mathbf{r} que observam esta equação se encontra na linha recta ℓ da Fig. A2. Novamente, isto significa que o vector \mathbf{r} , tal que $\mathbf{r} \wedge \mathbf{a} = \mathbf{B}$, não fica caracterizado univocamente: qualquer ponto em ℓ é solução deste segundo problema.

Figura A2 A linha recta ℓ é o lugar geométrico dos afixos dos vectores \mathbf{r} tais que $\mathbf{r} \wedge \mathbf{a} = \mathbf{B}$, i.e., tais que $(\mathbf{r} - \mathbf{b}) \wedge \mathbf{a} = 0$ em que se introduziu um vector \mathbf{b} com $\mathbf{B} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$.



Ou seja: nem o produto interno nem o produto exterior são invertíveis. Porém, ao considerar o produto geométrico $\mathbf{r}\mathbf{a} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{r} \wedge \mathbf{a}$, somos conduzidos à intersecção do plano π com a linha recta ℓ , i.e., ao ponto P da Fig. A2. Portanto, neste caso, somos univocamente conduzidos a um único vector \mathbf{r} tal que $\mathbf{r} = \mathbf{b}$. Isto mostra a invertibilidade do produto geométrico: a solução representada pelo vector \mathbf{r} é, agora, uma solução única tal como também se indica na Fig. A3. Por outras palavras: se $u = \mathbf{b}\mathbf{a}$ existe um único $u^{-1} = \mathbf{a}^{-1}\mathbf{b}^{-1}$ tal que $uu^{-1} = u^{-1}u = 1$.

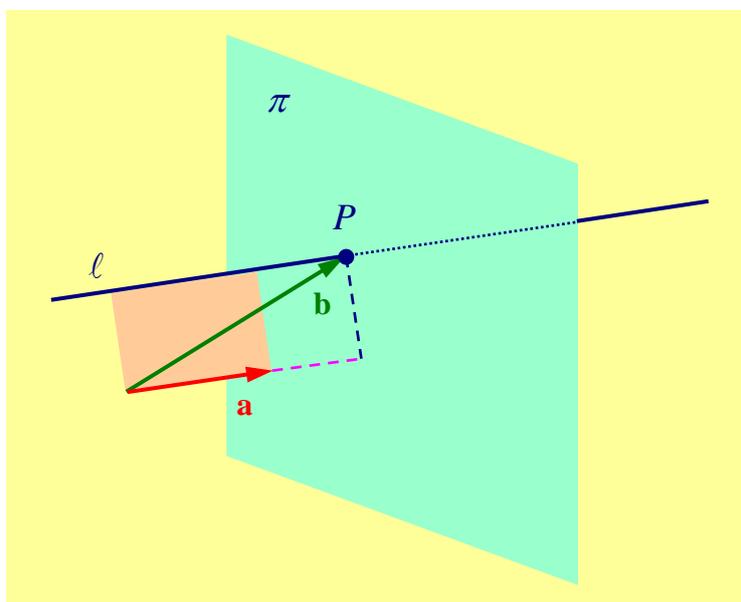


Figura A3 Dados dois vectores \mathbf{a} e \mathbf{r} , tem-se $u = \mathbf{r}\mathbf{a} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{r} \wedge \mathbf{a} = \alpha + \mathbf{B}$. O plano π é o lugar geométrico de $\mathbf{r} \cdot \mathbf{a} = \alpha$, com $\alpha \in \mathbb{R}$. A linha ℓ é o lugar geométrico de $\mathbf{r} \wedge \mathbf{a} = \mathbf{B}$, com $\mathbf{B} \in \wedge^2 \mathbb{R}^3$. O ponto P é a intersecção de ℓ com π e existe, portanto, um único vector $\mathbf{r} = \mathbf{b}$ tal que $u = \mathbf{b}\mathbf{a} = \alpha + \mathbf{B}$.



Apêndice B

Os Quaterniões de Hamilton

Hamilton inventou os *quaterniões* em 1843. Os quaterniões $q \in \mathbb{H}$ são números hipercomplexos da forma

$$\boxed{\text{anel de divisão dos quaterniões de Hamilton}} \rightarrow \mathbb{H}$$

$$\boxed{q = w + ix + jy + kz \in \mathbb{H}} \rightarrow \boxed{\dim(\mathbb{H}) = 4} \leftarrow \{1, i, j, k\} \leftarrow \text{base}$$

em que $w, x, y, z \in \mathbb{R}$ e onde as unidades imaginárias generalizadas i, j, k satisfazem as relações

$$\begin{cases} i^2 = j^2 = k^2 = -1 \\ ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j \end{cases}$$

$$\therefore \boxed{i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1}.$$

A multiplicação é, por definição, não comutativa – embora seja associativa: \mathbb{H} é um *anel de divisão* mas não é um corpo (um corpo é um anel de divisão abeliano ou comutativo).

Nomenclatura: Os conjuntos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ e \mathbb{H} representam, respectivamente, os seguintes números: naturais (não incluem o zero), inteiros, racionais, reais, complexos e quaterniões (de Hamilton). Tem-se $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$.

Demonstração: É fácil mostrar, usando apenas a associatividade, que todas as propriedades resultam de $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$. Vejamos:

$$\begin{aligned} ijk = (ij)k = -1 &\Rightarrow \boxed{k = ij} \\ ijk = i(jk) = -1 &\Rightarrow \boxed{i = jk} \end{aligned}$$

$$\therefore \begin{aligned} ik = i(ij) = (ii)j = -j \\ ki = (ij)(jk) = i(jj)k = -ik \end{aligned} \Rightarrow \boxed{j = ki}$$

$$\therefore \begin{cases} ij = i(ki) = (ik)i = -(ki)i = -ji \\ jk = j(ij) = (ji)j = -(ij)j = -kj \end{cases}$$

Motivação: A descoberta dos quaterniões pode entender-se como uma tentativa de generalizar os números complexos para três dimensões. Porém, para generalizar $z = x + iy \in \mathbb{C}$, talvez fosse mais natural começar por considerar $w = z + ix + jy$, com $x, y, z \in \mathbb{R}$. Note-se que, com efeito, se tem

$$\begin{aligned} |w|^2 &= w\bar{w} = (z + ix + jy)(z - ix - jy) \\ &= (x^2 + y^2 + z^2) - xy(ij + ji) \end{aligned}$$

supondo que $i^2 = j^2 = -1$. Logo, impondo que $|w|^2 = x^2 + y^2 + z^2$, obtém-se a regra de não comutatividade $ij = -ji$. Esta solução, contudo, tem um problema insuperável. Vejamos o que seria o produto (no caso geral)

$$\begin{cases} w_1 = z_1 + ix_1 + jy_1 \\ w_2 = z_2 + ix_2 + jy_2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} w_1 w_2 &= (z_1 + ix_1 + jy_1)(z_2 + ix_2 + jy_2) \\ &= (z_1 z_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 w_2 + z_1 x_2) + j(y_1 z_2 + z_2 y_1) + ij(x_1 y_2 - y_1 x_2) \end{aligned}$$

o que mostra que, nestas condições, a álgebra não é fechada pois gera um elemento novo, $k = ij$, que está fora dela. Portanto, é natural admitir que se tem de considerar

$$x, y, z, w \in \mathbb{R} \rightarrow \begin{cases} q = w + ix + jy + kz \\ \bar{q} = w - ix - jy - kz \end{cases}$$

$$\begin{aligned} |q|^2 &= q\bar{q} = (w + ix + jy + kz)(w - ix - jy - kz) \\ &= \left[(w^2 + x^2 + y^2) + z^2(-k^2) \right] - xz(ik + ki) - yz(jk + kj) \end{aligned}$$

supondo, à partida, que deve ter-se $i^2 = j^2 = -1$ e que $ij = -ji$. Assim, admitindo agora que deve ter-se $|q|^2 = q\bar{q} = w^2 + x^2 + y^2 + z^2$, infere-se com efeito que

$$\begin{cases} k^2 = -1 \\ ik = -ki \\ jk = -kj \end{cases}$$

donde resultam, depois, as restantes propriedades. A álgebra é, então, fechada e associativa – mas não é comutativa (em geral).

Definições: Uma operação binária $\circ: X^2 \rightarrow X$, definida no conjunto X , tem elemento neutro $e \in X$ sse (se e só se) $x \circ e = e \circ x = e$ para qualquer $x \in X$. Um elemento $x \in X$ diz-se invertível sse existe $y \in X$ tal que $x \circ y = y \circ x = e$ (ao elemento y dá-se o nome de inverso de x). A estrutura algébrica (X, \circ) diz-se um *monóide* se tem identidade e em X e se a operação binária é associativa, i.e., se $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ para quaisquer $x, y, z \in X$.

Um monóide (G, \circ) diz-se um *grupo* sse todos os elementos de G são invertíveis. Note que, e.g., o monóide (\mathbb{R}, \times) não é um grupo já que o número 0 , que é um elemento absorvente (no sentido em que $x \times 0 = 0 \times x$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$), não tem inverso (o elemento neutro é, neste caso, $e = 1$). O grupo diz-se abeliano se a operação \circ é comutativa.

Um *anel* é um terno ordenado $(A, +, \times)$ em que $(A, +)$ é um grupo abeliano, o produto \times é associativo e a soma e o produto são distributivos. Note que \mathbb{N} não é um anel: o par $(\mathbb{N}, +)$ não é um monóide já que $0 \notin \mathbb{N}$. Também $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ não é um anel porque $(\mathbb{N}_0, +)$ não é um grupo: os naturais não têm simétrico. Se o anel A tem identidade para o produto então (A, \times) é um monóide e o anel diz-se unitário. É habitual designar o elemento neutro da «adição» do anel por «zero» e o elemento neutro da sua «multiplicação» por «identidade». Um anel é abeliano se a sua «multiplicação» é comutativa. Designa-se por A^\times o conjunto dos elementos invertíveis do monóide (A, \times) . Por exemplo: $\mathbb{Z}^\times = \{-1, 1\}$. Prova-se que se A é um anel unitário então (A^\times, \times) é um grupo. Existem anéis em que $a \times b = 0$ e, simultaneamente, $a \neq 0$ e $b \neq 0$ (caso em que a e b se dizem divisores de zero). Exemplos de divisores de zero no anel unitário $\mathbb{R}(2) = \text{Mat}(2, \mathbb{R})$ das matrizes 2×2 definidas em \mathbb{R} :

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases} \rightarrow a = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0, \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \neq 0 \rightarrow a \times b = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Um *anel de divisão* é um anel unitário A tal que $A^\times = A - \{0\}$, i.e., em que todos os elementos não-nulos são invertíveis. O anel \mathbb{Z} não é um anel de divisão; \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} e \mathbb{H} são anéis de divisão. Chama-se *corpo* a um anel de divisão abeliano. O anel de divisão \mathbb{H} não é um corpo. Os octoníões \mathbb{O} não constituem um anel porque o produto \times não é associativo.

Definição adicional: O anel A verifica a *lei do corte para o produto* se

$$\forall a, b, c \in A, [c \neq 0 \text{ e } (a \times c = b \times c \text{ ou } c \times a = c \times b)] \Rightarrow a = b.$$

Recordemos o exemplo já citado anteriormente do anel $\mathbb{R}(2)$ das matrizes 2×2 definidas em

\mathbb{R} . Trata-se, neste caso, de um anel em que a lei do corte para o produto não é válida:

$$c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0, \quad a = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \left[\begin{array}{l} a \times c = b \times c = 0 \\ c \times a = c \times b = 0 \end{array} \right] \leftarrow a \neq b.$$

Um *domínio integral* é um anel unitário abeliano $A \neq \{0\}$ no qual a lei do corte para o produto é válida.

Referência:

 Rui Loja Fernandes e Manuel Ricou, *Introdução à Álgebra*. Lisboa: IST Press, 2004

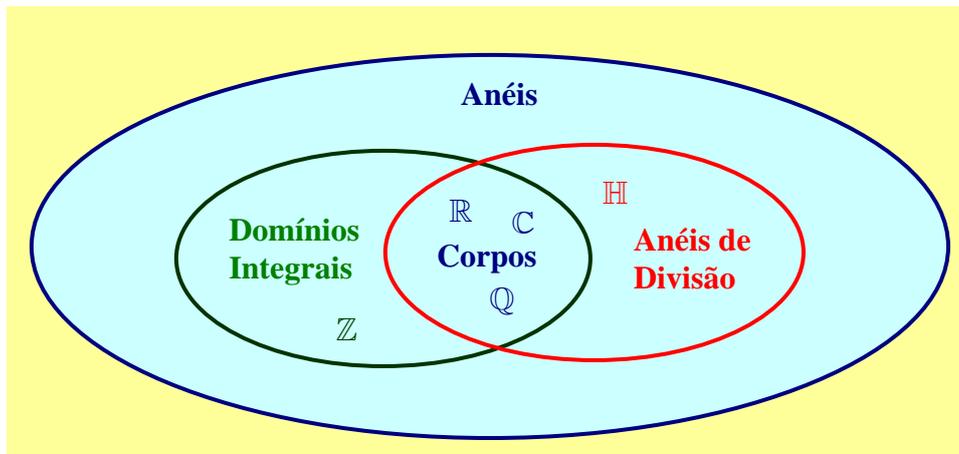


Figura B1 Os vários tipos de anéis em álgebra abstracta.

As regras de multiplicação dos quatérniões podem ser sintetizadas na forma

$$\boxed{i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1}.$$

Definição:

$$\boxed{q = w + ix + jy + kz \in \mathbb{H}} \mapsto \boxed{\bar{q} = w - ix - jy - kz \in \mathbb{H}} \leftarrow \text{quatérnião conjugado}$$

$$\begin{aligned}
 q^2 &= (w^2 - x^2 - y^2 - z^2) + 2w(ix + jy + kz) \\
 |q|^2 &= q\bar{q} = w^2 + x^2 + y^2 + z^2 \\
 q^{-1} &= \frac{\bar{q}}{|q|^2} = \frac{1}{w + ix + jy + kz} = \frac{w - ix - jy - kz}{w^2 + x^2 + y^2 + z^2} \\
 \therefore \quad &\boxed{q^2 - 2wq + |q|^2 = 0}
 \end{aligned}$$

Define-se a *parte real* $\Re(q) = w \in \mathbb{R}$ e a *parte pura* $\wp(q) = ix + jy + kz \in \mathbb{R}^3$.

notação \rightarrow $\boxed{q = q_0 + \mathbf{q} \in \mathbb{H}, \quad q_0 = \Re(q), \quad \mathbf{q} = \wp(q) \quad \therefore \quad \mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3}$

$$\begin{cases} a = a_0 + \mathbf{a} \in \mathbb{H} \\ b = b_0 + \mathbf{b} \in \mathbb{H} \end{cases} \Rightarrow \boxed{ab = a_0b_0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + a_0\mathbf{b} + b_0\mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{b}}$$

$$a_0 = b_0 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} \\ \mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k} \end{cases} \leftarrow \text{quaterniões puros}$$

$$\begin{cases} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \\ \mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k} \end{cases}$$

$$\therefore \quad \mathbf{ab} = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{b} \Rightarrow \boxed{\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \wp(\mathbf{ab})} \leftarrow \text{produto externo de Gibbs}$$

Existe um isomorfismo entre o anel de divisão \mathbb{H} e a subálgebra par de $C\ell_3$, i.e., tem-se

$$C\ell_3^+ = \mathbb{R} \oplus \bigwedge^2 \mathbb{R}^3 \rightarrow \boxed{\mathbb{H} \simeq C\ell_3^+}.$$

Para estabelecer este isomorfismo basta ter em consideração a seguinte correspondência:

\mathbb{H}	$C\ell_3^+$
i	$-\mathbf{e}_{23}$
j	$-\mathbf{e}_{31}$
k	$-\mathbf{e}_{12}$

O isomorfismo $C\ell_3 \simeq \mathbb{C}(2) = \text{Mat}(2, \mathbb{C})$, por sua vez, estabelece-se com base na correspondência:

$\mathbb{C}(2) = \text{Mat}(2, \mathbb{C})$	Cl_3
I	1
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$
$\sigma_2\sigma_3, \sigma_3\sigma_1, \sigma_1\sigma_2$	$\mathbf{e}_{23}, \mathbf{e}_{31}, \mathbf{e}_{12}$
$\sigma_1\sigma_2\sigma_3$	\mathbf{e}_{123}

onde as matrizes de Pauli são dadas por

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Assim, o quaternião $q \in \mathbb{H}$ é isomorfo à matriz $Q \in \mathbb{C}(2)$, tendo-se

$$\boxed{q = w + ix + jy + kz} \simeq \boxed{Q = \begin{pmatrix} w - iz & -y - ix \\ y - ix & w + iz \end{pmatrix}}.$$

■

Os octonions \mathbb{O} constituem uma generalização dos quaterniões de Hamilton e a sua descoberta deve-se a John T. Graves (1843) e a Arthur Cayley (1845). Nos octonions $p \in \mathbb{O}$, tem-se

$$p = x_\infty + x_0 i_0 + x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3 + x_4 i_4 + x_5 i_5 + x_6 i_6$$

onde $x_\infty, x_n \in \mathbb{R}$, com $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, e i_n são as unidades imaginárias.

A figura anexa, devida a Freudenthal (1951) é conhecida pelo plano de Fano $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$, mostra as relações entre as unidades imaginárias:

$$\text{índices módulo } 7 \rightarrow \begin{cases} i_n^2 = -1 \\ i_{n+1} i_{n+2} = i_{n+4} = -i_{n+2} i_{n+1} \\ i_{n+2} i_{n+4} = i_{n+1} = -i_{n+4} i_{n+2} \\ i_{n+4} i_{n+1} = i_{n+2} = -i_{n+1} i_{n+4} \end{cases}.$$

Tem-se

$$\boxed{\text{construção de Cayley-Dickson}} \rightarrow \begin{cases} \mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} i \\ \mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} j \\ \mathbb{O} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H} \ell \end{cases}$$

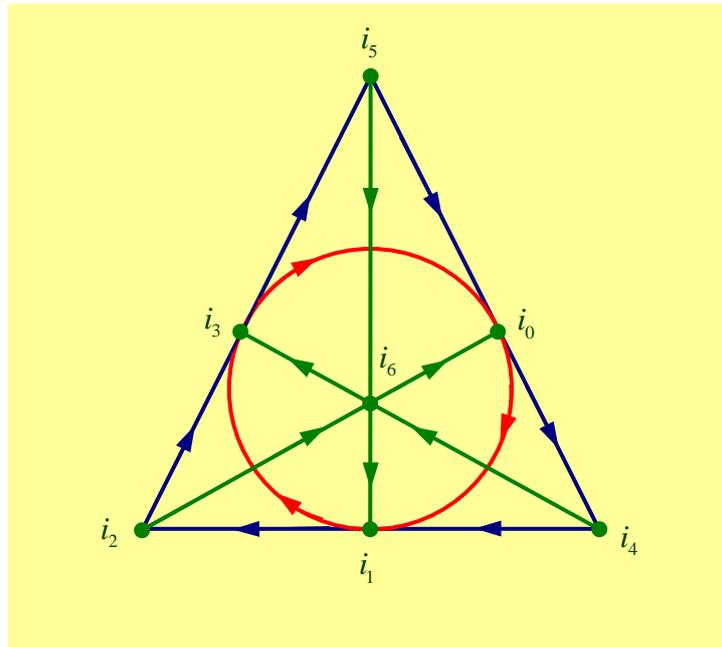


Figura B2 O plano de Fano permite conhecer as regras de multiplicação das unidades imaginárias i_n dos quaterniões. Para determinar o produto de duas unidades imaginárias distintas há, apenas, que achar a linha que os liga. Então, o resultado do produto é, à parte o sinal, o elemento restante dessa linha. O sinal é determinado pelas setas. Assim, e.g., tem-se: $i_0 i_1 = -i_1 i_0 = i_3$, $i_0 i_2 = i_6$, $i_0 i_4 = i_5$, $i_1 i_6 = -i_5$.

A base dos octoniões será, portanto, $\{1, i_0, i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6\}$, i.e., tem-se $\dim(\mathbb{O}) = 8$.

Tabela multiplicativa dos octoniões

\nearrow	i_0	i_1	i_2	i_3	i_4	i_5	i_6
i_0	-1	i_3	i_6	$-i_1$	i_5	$-i_4$	$-i_2$
i_1	$-i_3$	-1	i_4	i_0	$-i_2$	i_6	$-i_5$
i_2	$-i_6$	$-i_4$	-1	i_5	i_1	$-i_3$	i_0
i_3	i_1	$-i_0$	$-i_5$	-1	i_6	i_2	$-i_4$
i_4	$-i_5$	i_2	$-i_1$	$-i_6$	-1	i_0	$-i_2$
i_5	i_4	$-i_6$	i_3	$-i_2$	$-i_0$	-1	i_1
i_6	i_2	i_5	$-i_0$	i_4	$-i_3$	$-i_1$	-1

Nota: Designemos por números hipercomplexos os números que são constituídos por n -tuplos (multipletos) de números reais, com $n \geq 2$, em que se define uma adição vectorial, uma multiplicação distributiva e um valor absoluto multiplicativo. \mathbb{C} é o único sistema de números hipercomplexos em que a multiplicação é, simultaneamente, comutativa e associativa (Weierstrass, 1884). \mathbb{H} é o único sistema de números hipercomplexos em que a multiplicação é associativa (Frobenius, 1878). \mathbb{O} é o único restante sistema de números hipercomplexos possível (Hurwitz, 1898) que não é, em geral, nem associativo nem comutativo.

Bibliografia sobre quaterniões e octoniões

-  Roger Penrose, *The Road to Reality: A Complete Guide to the Laws of the Universe*. New York: Alfred A. Knopf, 2005 (Chapters 11 and 16)
-  Pertti Lounesto, *Clifford Algebras and Spinors*. Cambridge: Cambridge University Press, 2nd ed., 2001 (Chapters 5 and 23)
-  Simon L. Altmann, *Rotations, Quaternions, and Double Groups*. Mineola, NY: Dover, (1986) 2005
-  Jack B. Kuipers, *Quaternions and Rotation Sequences: A Primer with Applications to Orbits, Aerospace, and Virtual Reality*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1999
-  Andrew J. Hanson, *Visualizing Quaternions*. San Francisco, CA: Morgan Kaufmann Publishers, 2006
-  John H. Conway and Derek A. Smith, *On Quaternions and Octonions: Their Geometry, Arithmetic, and Symmetry*. Wellesley, MA: A K Peters, 2003.
-  John C. Baez, "The octonions," *Bull. Amer. Math. Soc.*, Vol. 39, pp. 145-205, 2002.



Apêndice C

Produto Externo de Gibbs

O produto externo não faz parte da álgebra geométrica Cl_3 . Porém, atendendo à sua grande utilização quer em física quer em engenharia, vai-se agora estabelecer a sua definição bem como a sua relação com os objectos de Cl_3 .

Definição: Sejam $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$. Define-se um vector $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, denominado *produto externo* dos vectores \mathbf{a} e \mathbf{b} , que observa as seguintes propriedades:

ortogonalidade:	$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \perp \mathbf{a}, (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \perp \mathbf{b}$
comprimento igual à área:	$ \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \mathbf{b} \sin(\theta)$
triedro dextrorso (ou direito):	$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b})$

Ou seja, o comprimento $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ é igual à área do paralelogramo correspondente ao bivector $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$. Na Fig. C1 mostra-se a relação geométrica entre o vector $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ e o bivector $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$.

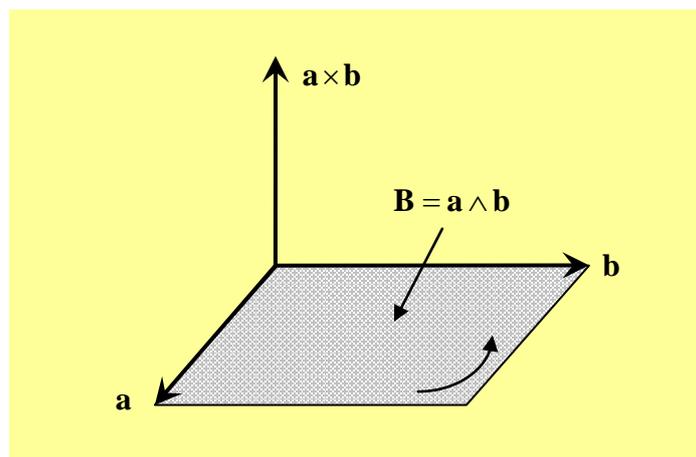


Figura C1 O bivector $\mathbf{B} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ e o vector $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. O produto externo necessita de uma métrica. O produto exterior é independente de qualquer métrica.

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^2 = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 - \mathbf{a}^2 \mathbf{b}^2 = -|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}|^2$$

$$\therefore |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$$

Nota: Esta última equação pode ser considerada como uma simples expressão do teorema de Pitágoras (Fig. C2).

$$|\mathbf{a}|^2 = |\mathbf{a}|^2 \cos^2 \theta + |\mathbf{a}|^2 \sin^2 \theta$$

$$\begin{array}{|l} \text{teorema de} \\ \text{Pitágoras} \end{array} \rightarrow \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta, \quad |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta$$

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2$$

$$\begin{array}{|l} \text{teorema de} \\ \text{Pitágoras} \end{array} \rightarrow |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \\ \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} \end{vmatrix}$$

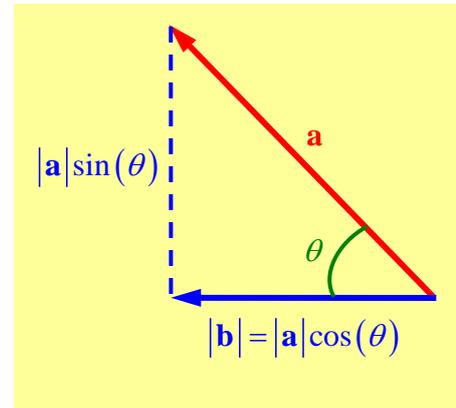


Figura C2 Teorema de Pitágoras.

Verifica-se, deste modo, que existe uma relação de dualidade entre o produto externo e o produto exterior.

$$\begin{array}{|l} \text{dualidade entre o produto} \\ \text{externo e o produto exterior} \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} \mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \mathbf{e}_{123} \in \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \mathbf{e}_{123} \in \bigwedge^2 \mathbb{R}^3 \end{array}$$

Numa base ortonormada $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ do espaço linear \mathbb{R}^3 , com a orientação direita, pode obter-se o produto externo de acordo com o determinante formal

$$\begin{array}{|l} \text{produto} \\ \text{externo} \end{array} \rightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \mathbf{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{e}_3.$$

Tal como o produto exterior o produto externo é anti-simétrico mas, ao contrário deste, não é associativo.

$$\begin{array}{|l} \text{anti-simetria:} \\ \text{não associatividade:} \end{array} \quad \begin{array}{l} \mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} \\ (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \neq \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \end{array}$$

Comentário: Na definição do vector $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ é necessária uma *métrica* para determinar a direcção perpendicular ao bivector $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$. O bivector $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$, porém, é independente de qualquer métrica.

O espaço linear \mathbb{R}^3 dotado do produto externo constitui uma *álgebra de Lie*: o produto externo não é abeliano (ou comutativo), não é associativo, não tem elemento neutro e obedece à identidade de Jacobi.

$$\text{álgebra de Lie} \rightarrow \begin{cases} \text{anti-simetria:} & \mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} \\ \text{distributividade:} & \mathbf{a} \times (\alpha \mathbf{b} + \beta \mathbf{c}) = \alpha (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + \beta (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \\ \text{identidade de Jacobi:} & \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0 \end{cases}$$

A distributividade no primeiro argumento resulta da anti-simetria:

$$(\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = -\mathbf{c} \times (\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}) = -\alpha (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) - \beta (\mathbf{c} \times \mathbf{b}) = \alpha (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + \beta (\mathbf{b} \times \mathbf{c}).$$

Usando a regra $\mathbf{a} \wedge [(\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \mathbf{e}_{123}] = [(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b}] \mathbf{e}_{123}$ deduzida anteriormente e tendo em consideração a dualidade, vem sucessivamente

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= -\mathbf{a} \times [(\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \mathbf{e}_{123}] = \{ \mathbf{a} \wedge [(\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \mathbf{e}_{123}] \} \mathbf{e}_{123} \\ &= \{ [(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b}] \mathbf{e}_{123} \} \mathbf{e}_{123} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{regra fundamental do produto externo}} \rightarrow \boxed{\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}}.$$

Usando esta regra é fácil verificar que a não associatividade (no caso geral)

$$\boxed{\text{não associatividade do produto externo}} \rightarrow (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} - \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a})$$

quer a identidade de Jacobi

$$\begin{cases} \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} \\ \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a} \\ \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0}.$$

A identidade de Jacobi é, de certa forma, a propriedade que substitui a associatividade numa álgebra de Lie.

Nota: Usando a regra fundamental do produto externo é também possível escrever o produto interno de dois vectores exclusivamente em termos do seu produto externo – desde que estes dois vectores não sejam paralelos. Vejamos.

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{a} - \mathbf{a}^2 \mathbf{b} \Rightarrow [\mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})] \wedge \mathbf{b} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$$

$$\therefore \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{[\mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})] \wedge \mathbf{b}}{\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}} \Rightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{[\mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})] \times \mathbf{b}}{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}$$

■

O produto externo tem, numa reflexão especular, um comportamento peculiar relacionado com o facto de um triedro orientado ser um objecto *quiral*: numa reflexão face a um espelho, um objecto quiral não coincide com a sua imagem. Com efeito, um triedro dextrorso (ou direito) tem, como imagem num espelho, um triedro sinistrorso (ou esquerdo). Na Fig. C3 o triedro $(\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}')$ é a imagem especular do triedro $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$. Porém, enquanto que $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, tem-se $\mathbf{c}' = -\mathbf{a}' \times \mathbf{b}'$.

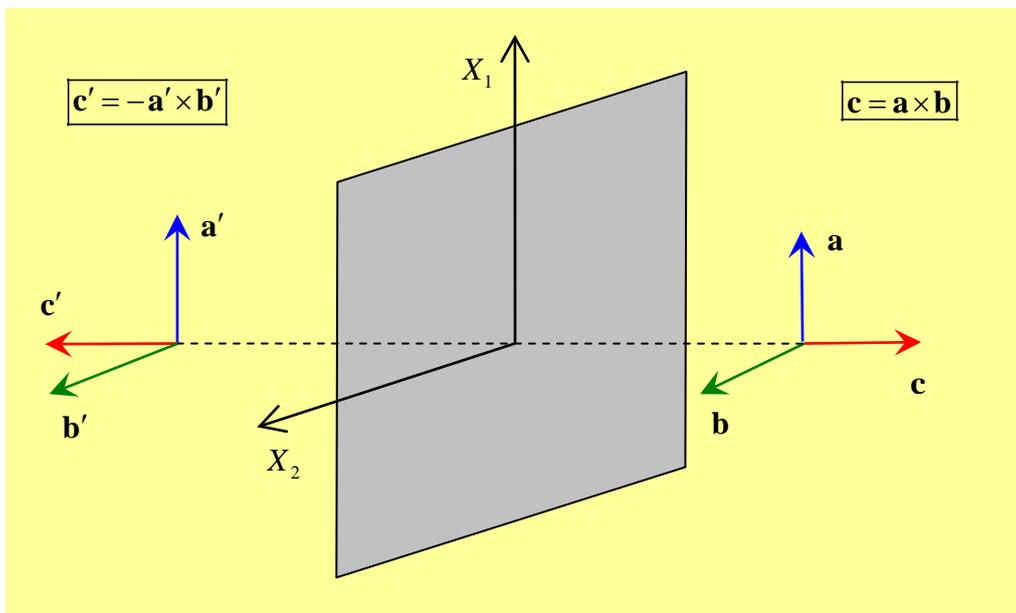


Figura C3 Produto externo $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$. As imagens no espelho $X_1 X_2$ dos vectores \mathbf{a} , \mathbf{b} e \mathbf{c} são os vectores \mathbf{a}' , \mathbf{b}' e \mathbf{c}' . Contudo, $\mathbf{c}' = -\mathbf{a}' \times \mathbf{b}'$, i.e., o produto externo não se comporta bem numa reflexão espacial. Note-se que o produto exterior tem o comportamento correcto uma vez que a imagem de $\mathbf{B} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ é $\mathbf{B}' = \mathbf{a}' \wedge \mathbf{b}'$.

■

Mas o produto externo padece de uma dificuldade mais grave: só existe, como tal, em três dimensões. Em duas dimensões não é possível sair do plano para introduzir um vector perpendicular ao plano; em quatro dimensões a direcção ortogonal ao plano não está univocamente determinada. Todas estas dificuldades podem ser superadas se, em vez da

álgebra de Lie associada ao produto externo, se adoptar uma nova álgebra – a álgebra geométrica proposta por Clifford.

Duais de Hodge: Além do dual de Clifford é também usual definir o dual de Hodge. O dual de Hodge de um vector \mathbf{a} é o bivector $\star \mathbf{a}$ e o dual de Hodge de um bivector \mathbf{B} é o vector $\star \mathbf{B}$, tais que

$$\text{duais de Hodge} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \star \mathbf{a} = \mathbf{a} \mathbf{e}_{123} \\ \star \mathbf{B} = -\mathbf{B} \mathbf{e}_{123} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \star (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \\ \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \star (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \end{array} \right.$$

Nota importante: O produto externo, tal como aqui definido, só existe em \mathbb{R}^3 . Com efeito, este é o único espaço onde o dual de um bivector é um vector. É, no entanto, possível generalizar o conceito de produto externo para espaços de maior dimensão: é o caso do espaço \mathbb{R}^7 onde é possível tal generalização para o produto externo de dois vectores como se mostra em:

 Pertti Lounesto, *Clifford Algebras and Spinors*. Cambridge: Cambridge University Press, 2nd ed., 2001 (pp. 96-98).

Porém, em \mathbb{R}^7 , tal generalização do produto externo não verifica a identidade de Jacobi e, consequentemente, não permite construir uma álgebra de Lie (ao contrário de \mathbb{R}^3).

O produto externo tem, tradicionalmente, relevância no chamado *produto misto* de três vectores $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ e que se representa por $\alpha = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}$.

Nota: Não existe ambiguidade na escrita adoptada para o produto misto já que a única alternativa exequível é $\alpha = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ uma vez que $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ não tem sentido.

No âmbito de \mathcal{Cl}_3 tal relevância desaparece dado que

$$\text{produto misto} \rightarrow \begin{cases} \alpha = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = -\mathbf{a} \cdot [(\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})\mathbf{e}_{123}] \\ = -\frac{1}{2}[\mathbf{a}(\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) + (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})\mathbf{a}]\mathbf{e}_{123} \\ = -(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c})\mathbf{e}_{123} \end{cases}$$

$$\boxed{\text{o dual do produto misto é um trivector}} \rightarrow \boxed{\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c})\mathbf{e}_{123}}$$

$$\therefore \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Ou seja, $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}|$ corresponde ao volume do paralelepípedo formado pelos três vectores.

■

Vamos agora analisar uma aplicação do produto externo: a rotação de um vector $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r}'$.

Fazendo

$$\begin{cases} \mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 \\ \alpha = |\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \end{cases}$$

verifica-se facilmente que

$$\mathbf{a} \times \mathbf{r} = \mathbf{A}\mathbf{r} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\mathbf{r}}.$$

A equação característica da matriz A é $\det(\lambda I - A) = 0$ que conduz a $\lambda^3 + \alpha^2\lambda = 0$. De acordo com o teorema de Cayley-Hamilton, qualquer matriz quadrada satisfaz a sua equação característica. Portanto

$$\lambda^3 + \alpha^2\lambda = 0 \Rightarrow A^3 + \alpha^2A = 0.$$

$$\therefore \begin{cases} A^{2k} = -(-1)^k \alpha^{2k-2} A^2, & k = 1, 2, 3, \dots \\ A^{2k+1} = (-1)^k \alpha^{2k} A, & k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{2k+1}}{(2k+1)!} &= \frac{A}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\alpha^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{A}{\alpha} \sin(\alpha) \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{2k}}{(2k)!} &= I - \frac{A^2}{\alpha^2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\alpha^{2k}}{(2k)!} \\ &= I + \frac{A^2}{\alpha^2} - \frac{A^2}{\alpha^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\alpha^{2k}}{(2k)!} \\ &= I + \frac{A^2}{\alpha^2} [1 - \cos(\alpha)] \\ \therefore \boxed{\exp(A) = I + \frac{A}{\alpha} \sin(\alpha) + \frac{A^2}{\alpha^2} [1 - \cos(\alpha)]}. \end{aligned}$$

Assim

$$A^2 = \begin{pmatrix} -a_2^2 - a_3^2 & a_1 a_2 & a_1 a_3 \\ a_1 a_2 & -a_1^2 - a_3^2 & a_2 a_3 \\ a_1 a_3 & a_2 a_3 & -a_1^2 - a_2^2 \end{pmatrix} \rightarrow \boxed{A^2 \mathbf{r} = \mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{a} - a^2 \mathbf{r}}.$$

É então possível definir a seguinte rotação espacial

$$\text{rotação} \rightarrow \boxed{\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r}' = \exp(A) \mathbf{r}}$$

que se ilustra na Fig. C4. Com efeito, tem-se sucessivamente

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{r} + \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} (A \mathbf{r}) + \frac{1 - \cos(\alpha)}{\alpha^2} (A^2 \mathbf{r}) \\ \mathbf{r}' &= \mathbf{r} + \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) + \frac{1 - \cos(\alpha)}{\alpha^2} [\mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r})] \\ \therefore \boxed{\mathbf{r}' = \cos(\alpha) \mathbf{r} + \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) + \frac{1 - \cos(\alpha)}{\alpha^2} [(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{a}]}. \end{aligned}$$

Convenhamos que não se trata de uma expressão nem muito concisa nem muito transparente.

Ao usar o conceito de rotor, em $\mathcal{C}\ell_3$, este tipo de operação é – como se viu – muito mais simples de escrever:

$$\left| \begin{aligned} \mathbf{r}' &= R \mathbf{r} \tilde{R} \\ R &= \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{a} \mathbf{e}_{123}\right) \end{aligned} \right.$$

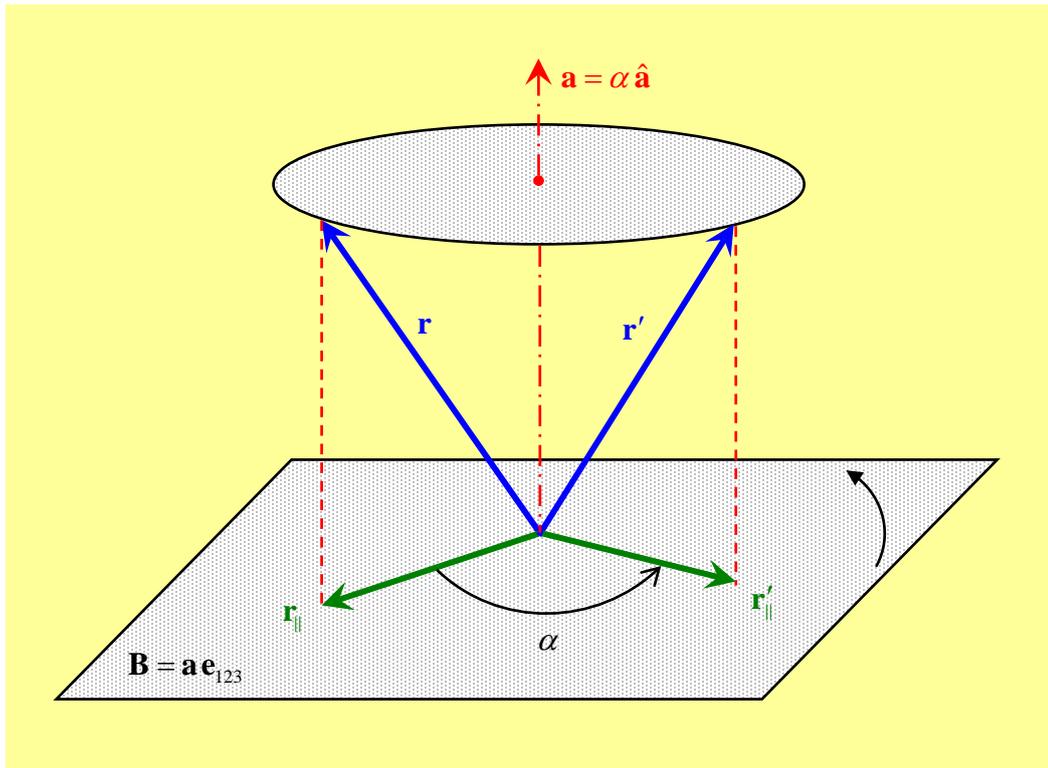


Figura C4 Rotação do vector \mathbf{r} para $\mathbf{r}' = \exp(A)\mathbf{r}$. A matriz A descreve a rotação cujo eixo é o vector $\mathbf{a} = \alpha \hat{\mathbf{a}}$. A componente paralela de \mathbf{r} , \mathbf{r}_{\parallel} , roda um ângulo α no plano do bivector $\mathbf{B} = \mathbf{a} \mathbf{e}_{123}$.

■

Finalmente, é necessário estabelecer uma precisão importante: o produto externo (usual, i.e., tal como se definiu no início desta secção) não corresponde exactamente ao dual de Clifford de um produto exterior como se escreveu atrás. Na verdade a dualidade inscrita nas equações

$$\boxed{\text{dualidade entre o produto externo e o produto exterior}} \rightarrow \boxed{\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= -(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \mathbf{e}_{123} \in \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} &= (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \mathbf{e}_{123} \in \bigwedge^2 \mathbb{R}^3 \end{aligned}}$$

não respeita a regra da formação do produto externo numa involução espacial em que se altera a orientação do espaço fazendo

$$\boxed{\text{involução espacial}} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{e}'_1 = -\mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \mapsto \mathbf{e}'_2 = -\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \mapsto \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_3 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{e}'_{123} = \mathbf{e}'_1 \wedge \mathbf{e}'_2 \wedge \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_{123}$$

$$\text{simetria ímpar} \rightarrow \mathbf{c}' = \mathbf{a}' \times \mathbf{b}' = -(\mathbf{a}' \wedge \mathbf{b}') \mathbf{e}'_{123} = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \mathbf{e}_{123} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{c}.$$

Com efeito, de acordo com esta involução espacial, deveria ter-se

$$\text{simetria par} \rightarrow \mathbf{c}' = \mathbf{a}' \times \mathbf{b}' = (-\mathbf{a}) \times (-\mathbf{b}) = \mathbf{c}$$

de acordo com (a interpretação passiva)

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{simetria} \\ \text{par} \end{array}} \rightarrow \mathbf{c}' = \mathbf{a}' \times \mathbf{b}' = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ b'_1 & b'_2 & b'_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ -b_1 & -b_2 & -b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \mathbf{c}.$$

Nota importante: Estas considerações mostram que a definição

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \mathbf{e}_{123}$$

não está de acordo com a *definição tradicional* do produto externo. Nesta nova definição (dentro da álgebra geométrica e baseada na dualidade de Clifford) o produto externo tem uma simetria *ímpar* numa involução espacial; na definição tradicional o produto externo tem uma simetria *par* numa involução espacial.

Vectores polares e axiais: Devido a este tipo de comportamento assimétrico do produto externo (definido tradicionalmente), há autores que falam de “vectores polares” ou “vectores verdadeiros” e de “vectores axiais” ou “pseudovectores”. Na realidade, tal distinção só é necessária devido à assimetria do produto externo numa involução espacial. Ao eliminar a definição tradicional tal ambiguidade desaparece: na álgebra geométrica todos os vectores são “polares”. Note-se, contudo, que as considerações da Fig. C3 continuam válidas, i.e., permanece uma assimetria intrínseca (ou quiral) relacionada com as reflexões especulares em ambas as definições de produto externo.

Nota final: Facilmente se verifica que a simetria par da definição tradicional de produto externo coincide com a simetria (também) par dos bivectores numa involução espacial. Isto mostra que o papel tradicionalmente reservado aos “vectores axiais” deve ser desempenhado pelos correspondentes bivectores. O “pseudoescalar” tradicional (não confundir com o trivector da álgebra Cl_3) associado ao produto misto $\alpha = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ deve agora ser desempenhado pelo trivector $\mathbf{V} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$. No âmbito da nova definição de produto externo, com efeito, o produto misto tem uma simetria par (numa involução espacial) – o que mostra que se trata de um escalar verdadeiro; só na definição tradicional de produto misto é que, numa involução espacial, se observa uma simetria ímpar.

Bibliografia

-  Pertti Lounesto, *Clifford Algebras and Spinors*. Cambridge: Cambridge University Press, 2nd ed., 2001 (Chapter 7: pp. 92-99)
-  Cibelle Celestino Silva and Roberto de Andrade Martins, “Polar and axial vectors versus quaternions,” *American Journal of Physics*, Vol. 70, No. 9, pp. 958-963, September 2002.



Apêndice D

Formas Quadráticas

Na Secção 3.1 analisou-se o problema da *relatividade euclidiana* no contexto da álgebra geométrica Cl_4 . Os alunos conhecem o conceito de espaço linear (ou vectorial). Porém, não estão tão familiarizados com o conceito de espaço quadrático. Explica-se, neste apêndice, em que consiste essa diferença.

Nota: No contexto da álgebra geométrica é preferível designar um espaço vectorial por espaço linear. A explicação é simples. Consideremos, a título de exemplo, a álgebra geométrica Cl_3 . A própria estrutura de soma graduada

$$Cl_3 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3 \oplus \bigwedge^2 \mathbb{R}^3 \oplus \bigwedge^3 \mathbb{R}^3$$

pode ser considerada um espaço linear. Porém, nesta estrutura linear, identifica-se o subespaço \mathbb{R}^3 como sendo constituído por *vectores* em sentido restrito (i.e., não no sentido geral, que lhe é atribuído pela definição de espaço linear, mas no sentido preciso em que é possível representar geometricamente estes objectos por setas). Assim o subespaço linear \mathbb{R}^3 é, portanto, o subespaço dos vectores (tal como, e.g., $\bigwedge^2 \mathbb{R}^3$ é o subespaço dos bivectores). Estamos, portanto, a conferir um significado concreto ao conceito de espaço vectorial e, deste modo, a distanciá-lo da sua definição habitual em álgebra abstracta.

Definição de álgebra: Define-se uma *álgebra* A sobre o corpo \mathbb{F} (um corpo é designado, em inglês, por *field*) como sendo o espaço linear A , definido sobre o corpo \mathbb{F} , dotado de uma operação $A^2 \rightarrow A: (a,b) \mapsto ab$ bilinear (i.e., linear em ambos os argumentos). Note-se que uma álgebra não tem que ser associativa (como o são todas as álgebras matriciais) – e.g., a álgebra dos octonões (ou álgebra de Cayley) e as álgebras de Lie (como a álgebra vectorial de Gibbs com o produto externo) não são associativas.

Exemplo: O conjunto dos números complexos \mathbb{C} pode ter duas interpretações distintas: (i) como corpo; (ii) como álgebra real. A interpretação (ii) tem mais estrutura do que (i). Vejamos porquê. Podemos interpretar \mathbb{C} como o conjunto $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dos pares ordenados de números reais através da identificação $z = (x, y)$ em que $z \in \mathbb{C}$ e $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, desde que

$$\begin{cases} (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) \end{cases}.$$

Note-se que, e.g., $i = (0, 1)$ com $(0, 1)^2 = (-1, 0)$ (equivalente a $i^2 = -1$). Esta estrutura é a estrutura de um corpo – o corpo \mathbb{C} . Podemos, agora, introduzir uma estrutura *suplementar* e transformar este corpo numa álgebra real: façamos $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, com $(a, b) \mapsto ab$, mas introduzindo a restrição segundo a qual, se $a \in \mathbb{R}$, então $ab \in \mathbb{C}$ através de

$$a = (\lambda, 0) \rightarrow (\lambda, 0)(x, y) = (\lambda x, \lambda y).$$

Com esta definição suplementar transformou-se a estrutura de corpo numa estrutura mais específica – a de uma álgebra real. A representação geométrica dos números complexos num plano tem a ver com esta segunda interpretação – já que é esta segunda interpretação (a de uma álgebra real) que permite individualizar \mathbb{R} como um subcorpo de \mathbb{C} . Embora se trate de uma subtilidade técnica, sublinhe-se que *só na interpretação* de \mathbb{C} como álgebra real é que é possível: (i) introduzir \mathbb{R} como subcorpo de \mathbb{C} através da aplicação injectiva $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ que estabelece a correspondência $x \mapsto (x, 0)$ em que $x \in \mathbb{R}$ e $(x, 0) \in \mathbb{C}$; (ii) definir dois únicos automorfismos $\alpha : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ que são a identidade $\alpha(x + iy) = x + iy$ e a conjugação complexa $\alpha(x + iy) = x - iy$. Na interpretação de \mathbb{C} como corpo existe uma infinidade de automorfismos. Em síntese: em \mathbb{C} enquanto corpo não é possível definir, só por si, o subcorpo \mathbb{R} dos reais – tal definição só é possível interpretando \mathbb{C} como uma álgebra real.

Definição de espaço quadrático: Seja V um espaço linear definido sobre o corpo \mathbb{F} (no nosso caso estamos apenas interessados em fazer $\mathbb{F} = \mathbb{R}$). Define-se uma *forma quadrática* em V como sendo a aplicação $Q : V \rightarrow \mathbb{F}$ tal que, para quaisquer $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{x} \in V$,

$$Q(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^2 Q(\mathbf{x})$$

e onde, exceptuando o caso da característica de \mathbb{F} ser igual a 2, se tem

$$Q(\mathbf{x}) = B(\mathbf{x}, \mathbf{x})$$

onde $B(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ é a forma bilinear quadrática (e simétrica)

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} [Q(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - Q(\mathbf{x}) - Q(\mathbf{y})].$$

Um espaço linear V onde está definida uma forma quadrática diz-se um *espaço quadrático*.

Nota sobre a bilinearidade: Mais explicitamente, a forma $B(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ enquanto aplicação $V \times V \rightarrow \mathbb{F}$, diz-se bilinear desde que, para quaisquer $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ e $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$,

$$B(\lambda \mathbf{x}, \mu \mathbf{y}) = \lambda B(\mathbf{x}, \mu \mathbf{y}) = \lambda \mu B(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

e ainda

$$\begin{cases} B(\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) = \lambda_1 B(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + \lambda_2 B(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}) \\ B(\mathbf{x}, \mu_1 \mathbf{y}_1 + \mu_2 \mathbf{y}_2) = \mu_1 B(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) + \mu_2 B(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2) \end{cases}$$

Note-se que, deste modo,

$$\begin{aligned} B(\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2, \mu_1 \mathbf{y}_1 + \mu_2 \mathbf{y}_2) &= \lambda_1 B(\mathbf{x}_1, \mu_1 \mathbf{y}_1 + \mu_2 \mathbf{y}_2) + \lambda_2 B(\mathbf{x}_2, \mu_1 \mathbf{y}_1 + \mu_2 \mathbf{y}_2) \\ &= \lambda_1 \mu_1 B(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) + \lambda_1 \mu_2 B(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2) \\ &\quad + \lambda_2 \mu_1 B(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1) + \lambda_2 \mu_2 B(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2). \end{aligned}$$

Além disso, tem-se

$$\begin{cases} Q(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = Q(\mathbf{x}) + Q(\mathbf{y}) + 2B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ Q(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = Q(\mathbf{x}) + Q(\mathbf{y}) - 2B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + Q(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 2Q(\mathbf{x}) + 2Q(\mathbf{y}) \\ Q(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - Q(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 4B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{cases}$$

uma vez que $Q(-\mathbf{y}) = Q(\mathbf{y})$, $B(\mathbf{x}, -\mathbf{y}) = -B(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Produto interno: Define-se um produto interno em V como sendo $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = B(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Em particular, tem-se $\mathbf{x}^2 = Q(\mathbf{x})$ que permite fundar uma estrutura de álgebra geométrica ou de Clifford. Dois vectores são ortogonais desde que $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$. Um vector diferente de zero, $\mathbf{x} \neq 0$, diz-se *nulo* ou *isotrópico* quando $Q(\mathbf{x}) = 0$. Uma forma quadrática diz-se *anisotrópica* se $Q(\mathbf{x}) = 0$ implica que $\mathbf{x} = 0$. Uma forma quadrática diz-se *isotrópica* quando $Q(\mathbf{x}) = 0$ para algum $\mathbf{x} \neq 0$. Uma forma bilinear diz-se *não-degenerada* quando $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ para todos os $\mathbf{y} \in V$ implicar que se tem $\mathbf{x} = 0$. Note-se que uma forma quadrática anisotrópica é sempre não-degenerada.

Métrica: Supondo que existe uma base $\{\mathbf{e}_i\}$ de \mathbb{R}^n , em que $i = 1, 2, \dots, n$, a matriz da métrica é dada por $G = g_{jk} = B(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k)$.

Plano hiperbólico: Chama-se plano hiperbólico ao espaço linear bidimensional isotrópico mas não-degenerado. O plano hiperbólico tem uma forma quadrática $\mathbf{y} = (y_1, y_2) \mapsto Q(\mathbf{y}) = y_1 y_2$.

Note-se que, fazendo

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_1 - x_2 \end{cases}$$

esta forma quadrática se escreve

$$Q(\mathbf{x}) = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = x_1^2 - x_2^2.$$

Assim, com efeito, basta ter $x_1 = x_2$ para que $\mathbf{x}^2 = 0$ mesmo quando $x_1 \neq 0$ e $x_2 \neq 0$ (i.e., a forma quadrática é isotrópica). Note-se, ainda, que esta forma quadrática está associada à forma bilinear simétrica

$$\begin{cases} \mathbf{a} = (a_1, a_2) \\ \mathbf{b} = (b_1, b_2) \end{cases} \rightarrow B(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{2} [Q(\mathbf{a} + \mathbf{b}) - Q(\mathbf{a}) - Q(\mathbf{b})] = a_1 b_1 - a_2 b_2.$$

Numa base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, em que $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ e $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$, tem-se $\mathbf{e}_1^2 = (1, 0)^2 = 1$, $\mathbf{e}_2^2 = (0, 1)^2 = -1$ e ainda $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = (1, 0) \cdot (0, 1) = 0$ a que corresponde a matriz da métrica

$$G = B(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Este plano hiperbólico corresponde ao espaço quadrático designado por $\mathbb{R}^{1,1}$ e gera a álgebra geométrica do plano hiperbólico $Cl_{1,1}$ tal que

$$Cl_{1,1} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{1,1} \oplus \bigwedge^2 \mathbb{R}^{1,1} \rightarrow \dim(Cl_{1,1}) = 2^2 = 4.$$

Por exemplo, tem-se

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_2$$

$$\therefore \mathbf{e}_1^2 = (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2)(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2) = -(\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1)(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2) = -\mathbf{e}_1^2 \mathbf{e}_2^2 = 1$$

o que mostra como, ao contrário de Cl_2 (a álgebra geométrica do plano euclidiano), o quadrado de qualquer bivector é positivo. Em geral tem-se

$$\mathbf{a}^2 = (a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2)(a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2) = a_1^2 - a_2^2 + a_1 a_2 (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1) = a_1^2 - a_2^2$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}\mathbf{b} &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2)(b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2) \\ &= (a_1 b_1 - a_2 b_2) + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{e}_{12} \end{aligned}$$

em que, portanto,

$$\mathbf{e}_{12}^2 = 1 \Rightarrow \exp(\zeta \mathbf{e}_{12}) = \cosh \zeta + \mathbf{e}_{12} \sinh \zeta .$$

A operação

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} = \exp(-\zeta \mathbf{e}_{12}) \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} \mathbf{f}_1 = \cosh \zeta \mathbf{e}_1 + \sinh \zeta \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{f}_2 = \sinh \zeta \mathbf{e}_1 + \cosh \zeta \mathbf{e}_2 \end{cases}$$

corresponde a um «boost».

Tabela multiplicativa da álgebra $Cl_{1,1}$

\nearrow	\mathbf{e}_1	\mathbf{e}_2	\mathbf{e}_{12}
\mathbf{e}_1	1	\mathbf{e}_{12}	\mathbf{e}_2
\mathbf{e}_2	$-\mathbf{e}_{12}$	-1	\mathbf{e}_1
\mathbf{e}_{12}	$-\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_1$	1

Tabela multiplicativa da álgebra Cl_2

\nearrow	\mathbf{e}_1	\mathbf{e}_2	\mathbf{e}_{12}
\mathbf{e}_1	1	\mathbf{e}_{12}	\mathbf{e}_2
\mathbf{e}_2	$-\mathbf{e}_{12}$	1	$-\mathbf{e}_1$
\mathbf{e}_{12}	$-\mathbf{e}_2$	\mathbf{e}_1	-1

Nota: Em Cl_2 , como $\mathbf{e}_{12}^2 = -1$, tem-se

$$Cl_2 \rightarrow \exp(\theta \mathbf{e}_{12}) = \cos \theta + \mathbf{e}_{12} \sin \theta$$

que corresponde a uma rotação

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} = \exp(-\theta \mathbf{e}_{12}) \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} \mathbf{f}_1 = \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{f}_2 = -\sin \theta \mathbf{e}_1 + \cos \theta \mathbf{e}_2 \end{cases} .$$

A matriz simétrica $G = g_{jk} = B(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k)$ pode ser diagonalizada (char $\mathbb{F} \neq 2$): qualquer forma quadrática é isométrica à forma diagonal $Q = d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \cdots + d_n x_n^2$ para $d_1, d_2, \dots, d_n \in \mathbb{F}$. Escreve-se, então,

$$\langle d_1, d_2, \dots, d_n \rangle \rightarrow Q = d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \cdots + d_n x_n^2.$$

Por exemplo: o espaço quadrático $\mathbb{R}^{1,1}$ corresponde a $Q = x_1^2 - x_2^2$ e, portanto, representa-se por $\langle 1, -1 \rangle$. Em relação ao espaço linear \mathbb{R}^4 correspondem diversas possibilidades de espaços quadráticos. A mais óbvia é, talvez, o espaço euclidiano $\mathbb{R}^{4,0}$, que se representa por $4\langle 1 \rangle = \langle 1, 1, 1, 1 \rangle$, e que gera a álgebra Cl_4 da relatividade euclidiana da Secção 3.2. Existem, porém, outras possibilidades:

$$\begin{array}{l} \mathbb{R}^{0,4} \rightarrow 4\langle -1 \rangle \rightarrow Cl_{0,4} \\ \mathbb{R}^{1,3} \rightarrow \langle 1, -1, -1, -1 \rangle \rightarrow Cl_{1,3} \\ \mathbb{R}^{3,1} \rightarrow \langle -1, 1, 1, 1 \rangle \rightarrow Cl_{3,1} \end{array}.$$

Excluem-se, devido à isotropia do espaço no espaço-tempo, todas as hipóteses que não se reduzem a

$$d_t, d_s \in \{1, -1\} \rightarrow Q(\mathbf{x}) = Q(x_0, x_1, x_2, x_3) = d_t x_0^2 + d_s (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$

com $d_s = -d_t$. Por exemplo: não se pode, como é óbvio, considerar a hipótese de se ter $Q(\mathbf{x}) = Q(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 + x_3^2$.

Bibliografia

-  Pertti Lounesto, *Clifford Algebras and Spinors*. Cambridge: Cambridge University Press, 2nd ed., 2001
-  John Horton Conway, *The Sensual Quadratic Form*. Washington, DC: The Mathematical Association of America, 1997
-  Ian R. Porteous, *Clifford Algebras and the Classical Groups*. Cambridge: Cambridge University Press, 1995
-  Tsit-Yuen Lam, *Introduction to Quadratic Forms over Fields*. Providence, RI: American Mathematical Society, 2005.



Apêndice E

Redução à Forma do Vácuo

Na Secção 3.4 estudou-se a chamada *redução à forma do vácuo*. Trata-se, basicamente, do seguinte: através das transformações

$$\begin{aligned} \mathbf{F}' &= \exp\left(-\frac{\xi}{2}r_v\right)\mathbf{F} \\ \mathbf{G}' &= \exp\left(\frac{\xi}{2}r_v\right)\mathbf{G} \\ \mathbf{k}' &= \exp\left(\frac{\xi}{2}r_v\right)\mathbf{k} \end{aligned}$$

é possível reduzir a relação constitutiva

$$\mathbf{G} = \frac{1}{\eta} \exp(-\xi r_v) \mathbf{F}$$

de um meio isotrópico à forma do vácuo

$$\mathbf{G}' = \frac{1}{\eta} \mathbf{F}'.$$

Neste apêndice vai-se demonstrar o seguinte teorema: as duas equações de Maxwell

$$\begin{cases} \mathbf{k} \wedge \mathbf{F} = 0 \\ \mathbf{k} \lrcorner \mathbf{G} = 0 \end{cases}$$

para ondas planas e monocromáticas da forma

$$\begin{cases} \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \Re\{\mathbf{F}_\omega(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)\} \\ \mathbf{F}_\omega(\mathbf{r}) = \mathbf{F}_0 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] \end{cases}$$

são covariantes em relação a esta transformação, i.e., tem-se

$$\begin{cases} \mathbf{k}' \wedge \mathbf{F}' = 0 \\ \mathbf{k}' \lrcorner \mathbf{G}' = 0 \end{cases}$$

Vejamus então.

■

Comecemos por notar que, definindo

$$\left| \begin{array}{l} \alpha = \cosh\left(\frac{\xi}{2}\right) \\ \beta = \sinh\left(\frac{\xi}{2}\right) \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \exp\left(\frac{\xi}{2}\right) = \alpha + \beta = \sqrt{n_0} \\ \exp\left(-\frac{\xi}{2}\right) = \alpha - \beta = \frac{1}{\sqrt{n_0}} \end{array} \right.$$

se tem

$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{F}' = \alpha \mathbf{F} - \beta \mathbf{F}_v \\ \mathbf{G}' = \alpha \mathbf{G} + \beta \mathbf{G}_v \\ \mathbf{k}' = \alpha \mathbf{k} + \beta \mathbf{k}_v \end{array} \right.$$

onde se fez, ainda,

$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{F}_v = r_v(\mathbf{F}) \\ \mathbf{G}_v = r_v(\mathbf{G}) \\ \mathbf{k}_v = r_v(\mathbf{k}) \end{array} \right.$$

Mas então, infere-se que

$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{k}' \wedge \mathbf{F}' = \alpha^2 (\mathbf{k} \wedge \mathbf{F}) - \beta^2 (\mathbf{k}_v \wedge \mathbf{F}_v) + \alpha\beta (\mathbf{k}_v \wedge \mathbf{F} - \mathbf{k} \wedge \mathbf{F}_v) \\ \mathbf{k}' \lrcorner \mathbf{G}' = \alpha^2 (\mathbf{k} \lrcorner \mathbf{G}) + \beta^2 (\mathbf{k}_v \lrcorner \mathbf{G}_v) + \alpha\beta (\mathbf{k}_v \lrcorner \mathbf{G} + \mathbf{k} \lrcorner \mathbf{G}_v) \end{array} \right.$$

Porém, tem-se

$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{k}_v \wedge \mathbf{F}_v = (\mathbf{k} \wedge \mathbf{F})_v \\ \mathbf{k}_u \lrcorner \mathbf{G}_u = (\mathbf{k} \lrcorner \mathbf{G})_u \\ \mathbf{k}_v \wedge \mathbf{F} - \mathbf{k} \wedge \mathbf{F}_v = -\mathbf{k} \wedge \mathbf{F} + (\mathbf{k} \wedge \mathbf{F})_v \\ \mathbf{k}_v \lrcorner \mathbf{G} + \mathbf{k} \lrcorner \mathbf{G}_v = -\mathbf{k} \lrcorner \mathbf{G} - (\mathbf{k} \lrcorner \mathbf{G})_v \end{array} \right.$$

de forma que

$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{k}' \wedge \mathbf{F}' = (\alpha - \beta) [\alpha (\mathbf{k} \wedge \mathbf{F}) + \beta (\mathbf{k} \wedge \mathbf{F})_v] = \exp\left(-\frac{\xi}{2}\right) \exp\left(\frac{\xi}{2} r_v\right) (\mathbf{k} \wedge \mathbf{F}) \\ \mathbf{k}' \lrcorner \mathbf{G}' = (\alpha - \beta) [\alpha (\mathbf{k} \lrcorner \mathbf{G}) - \beta (\mathbf{k} \lrcorner \mathbf{G})_v] = \exp\left(-\frac{\xi}{2}\right) \exp\left(-\frac{\xi}{2} r_v\right) (\mathbf{k} \lrcorner \mathbf{G}) \end{array} \right.$$

Logo, efectivamente,

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{k} \wedge \mathbf{F} = 0 \\ \mathbf{k} \lrcorner \mathbf{G} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{k}' \wedge \mathbf{F}' = 0 \\ \mathbf{k}' \lrcorner \mathbf{G}' = 0 \end{array} \right.$$

■

Note-se que, se se atender à relação constitutiva

$$\mathbf{G}' = \frac{1}{\eta} \mathbf{F}' ,$$

se infere imediatamente que

$$\mathbf{k}' \perp \mathbf{G}' = 0 \Rightarrow \mathbf{k}' \perp \mathbf{F}' = 0.$$

Assim, tem-se

$$\begin{cases} \mathbf{k}' \wedge \mathbf{F}' = 0 \\ \mathbf{k}' \perp \mathbf{F}' = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\mathbf{k}' \mathbf{F}' = 0} \Rightarrow \boxed{(\mathbf{k}')^2 = 0}$$

que é a equação análoga à equação do vácuo real

$$\mathbf{k} \mathbf{F} = 0.$$

No entanto, no caso de um meio isotrópico (que não seja o vácuo), tem-se

$$k_0 = \frac{\omega}{c} \rightarrow \mathbf{k} = k_0 (\mathbf{f}_0 + \vec{n})$$

$$\therefore \mathbf{k}^2 = k_0^2 [1 + (\vec{n})^2] \neq 0.$$

Com efeito, só no caso do vácuo é que $(\vec{n})^2 = -1$. Através da redução à forma do vácuo, vem então

$$\mathbf{k}_v = \frac{2}{c^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{v} - \mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}' = \exp\left(\frac{\xi}{2} \mathbf{r}_v\right) \mathbf{k} = \alpha \mathbf{k} + \beta \mathbf{k}_v = \alpha \mathbf{k} + \beta \left[\frac{2}{c^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{v} - \mathbf{k} \right]$$

$$\therefore \mathbf{k}' = (\alpha - \beta) \mathbf{k} + \frac{2\beta}{c^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{v}$$

ou, finalmente,

$$\boxed{\mathbf{k}' = \frac{1}{\sqrt{n_0}} \left[\mathbf{k} + \frac{n_0 - 1}{c^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{v} \right]}.$$

Note-se que, quando $n_0 = 1$, se recupera $\mathbf{k}' = \mathbf{k}$ como não podia deixar de ser. Daqui se infere, portanto, que

$$(\mathbf{k}')^2 = 0 \Rightarrow \boxed{\mathbf{k}^2 + \frac{1}{c^2} (n_0^2 - 1) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{k})^2 = 0}$$

tal como se tinha obtido na Secção 3.4.